HISTORIA

E

MEMORIAS

DA

ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS

DE LISBOA.

Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.

2.ª SERIE. TOMO III. PARTE I.

LISBOA

NA TYPOGRAPHIA DA MESMA ACADEMIA.

1851.

DA TRANSFORMAÇÃO,

E

REDUCÇÃO DOS BINARIOS.

POR

DANIEL AUGUSTO DA SILVA.

A theoria dos momentos foi por muito tempo empregada na Statica como um meio subsidiario para deduzir as equações d'equilibrio, e composição das forças.

Poinsot fez primeiro conhecer a natureza mechanica dos momentos, considerando-os como forças de rotação, isto é, como systemas formados por duas forças parallelas, iguaes, e contrarias. Esta descuberta simplificou excessivamente a sciencia do equilibrio, e conduzio o seu author a theoremas importantes, que difficilmente serião obtidos pela theoria dos momentos tractada analytica, ou geometricamente. A composição das forças situadas de qualquer modo no espaço ficou reduzida a dous principios inteiramente analogos — o da composição das forças applicadas a um ponto, e o da composição dos binarios, [*couples* de Poinsot]. Esta nova theoria, apezar da sua lucidez e fecundidade, não foi desde logo adoptada por todos os geometras. A especie de adhesão supersticiosa com que frequentemente os

homens de sciencia defendem os methodos com que forão educados, é causa do pouco favor com que por vezes são acolhidas as descobertas, que tornão desnecessaria a longa serie de raciocinios dos imperfeitos methodos antigos.

E' particularmente de admirar, que a vasta intelligencia de Poisson se recusasse a acceitar aquella brilhante invenção, de modo que, para tractar a composição das forças no espaço, fosse recorrer á idea fundamental do laborioso processo empregado por d'Alembert; e que na theoria dos momentos tomasse em consideração unicamente a sua analogia com as projecções das superficies — para obter, por meio de extensas transformações analyticas, as proposições que, pelo methodo de Poinsot, se tornão consequencias simplicissimas da representação directa de cada binario pelo seu eixo.

Como era forçoso que viesse a acontecer, as prevenções contra o methodo de Poinsot acabárão inteiramente: quasi todos os tractados modernos de Statica se tem limitado á reproducção fiel dos trabalhos daquelle sabio.

Pareceu-nos porêm, que a theoria dos binarios se podia ainda apresentar por um modo diverso, e igualmente simples, ligando a idea geometrica dos momentos, considerados como superficies, á idea mechanica da natureza dos binarios. Desse modo demonstramos a translação dos binarios por construcções geometricas bastante claras, e particularmente na decomposição dos binarios situados de qualquer maneira no espaço, e referidos a planos coordenados obliquos, parece-nos ter conseguido, para o caso geral, a vantagem que tivêrão em vista Duhamel e Lobatto (*) na decomposição em relação a planos orthogonaes. Por meio das formulas de geometria analytica empregadas por esses illustres professores achão elles directamente o binario total situado em cada um dos planos coordenados, sem necessidade da decomposição successiva, e um tanto longa de que usa Poinsot. Mas esse methodo tem o grave inconveniente de não ser applicavel, quando os eixos são obliquos; e por isso não póde substituir inteiramente a deducção de Poinsot.

O principio em que nos fundamos no presente traba-

(*) *Cours de Mécan., Journal de Mathem. de M. Liouville Tom.* XI.

lho, para a decomposição dos binarios em relação a planos obliquos, não só é absolutamente geral, mas tem ainda a vantagem de ser uma representação geometrica evidente de um systema qualquer de binarios em equilibrio, representação que se reduz a um systema de forças duas a duas coincidentes em direcção, e grandeza com as arestas de um polyedro, mas contrarias em sentido.

Julgámos conveniente fazer preceder a theoria dos binarios, que apresentamos, pela exposição rapida dos principios de Statica que lhe servem de fundamento, não só para mostrar a ligação que existe entre aquella theoria e esses principios, mas tambem para dar a necessaria clareza, e rigor a algumas dessas noções preliminares.

1. A Statica dos corpos solidos, a que exclusivamente nos referimos na presente memoria, bem como todas as sciencias physico-mathematicas, procura conseguir que a explicação dos phenomenos naturaes, mesmo os mais complicados, proceda por meio de mera deducção racional de um pequeno numero de leis simplicissimas fundamentadas na observação, e na experiencia.

Feitas pois as convenções necessarias, para que os elementos que figurão em qualquer phenomeno possão ser representados por symbolos mathematicos, a sciencia a partir desse ponto não é mais que um grande problema de analyse, ou de geometria, conforme o methodo que se adoptar.

A Statica dos corpos solidos, dada a hypothese da existencia destes, póde estabelecer-se unicamente nas seguintes noções empyricas, advertindo sempre, que se conclue analogicamente para o repouso e movimentos absolutos, o que se observa á superficie da terra para o repouso e movimentos relativos.

1.° O equilibrio de qualquer systema de forças é independente da configuração e grandeza da massa solida a que ellas estão applicadas, isto é, se um systema de for-

ças produz equilibrio, sendo applicado a um solido qualquer, o equilibrio se verifica tambem, se aquelle systema se applicar a outro solido.

2.° A acção de quaesquer forças sobre um corpo não é alterada, suppondo que se lhe applicou, ou delle se supprimio qualquer numero de systemas de forças taes, que applicados separadamente produzissem o equilibrio nesse corpo.

3.° Systemas de forças identicos applicados a corpos identicos em quietação ou animados do mesmo movimento, produzem effeitos identicos.

4.° Forças que actuão na mesma direcção e sentido, sendo applicadas simultaneamente a um ponto material, produzem movimento naquelle mesmo sentido, isto é, teem uma resultante nesse sentido.

5.° Forças iguaes, isto é, taes que sendo separadamente applicadas a um ponto material produzem nelle o mesmo movimento, sendo applicadas em sentido contrario aos extremos de uma recta material, e na direcção della, produzem o equilibrio, e por conseguinte [1.°] o mesmo acontecerá, substituindo a essa recta um corpo qualquer de que façáo parte os extremos da mesma recta. Este principio comprehende o caso particular de se reunirem em um só os dous pontos de applicação das forças.

6.° Um corpo que tem um ponto fixo não póde equilibrar-se por meio de uma força cuja direcção não passa por esse ponto.

7.° Um ponto material sollicitado por quaesquer forças póde ser equilibrado por meio de uma só força.

2. Admittidas as precedentes leis fundamentaes, vejamos quaes são as convenções necessarias para reduzir a um processo mathematico todos os problemas de Statica.

Temos a considerar unicamente as forças, e os corpos a que ellas são applicadas. Em quanto a estes, na parte puramente theorica da sciencia, não ha necessidade senão de representar os pontos de applicação. Pelo que diz respeito ás forças, qualquer dellas é representada commodamente por uma recta AP, em que a primeira lettra designa o ponto de applicação, e AP a direcção e sentido do movimento que AP produziria no ponto material A, se este se achasse isolado. A grandeza da recta AP completará a idea que devemos formar da força respectiva, em

virtude das seguintes convenções. Se considerarmos duas forças iguaes applicadas a um ponto material A, actuando no mesmo sentido, e representadas por rectas iguaes AP, AP', a resultante dellas, que obra nesse sentido, será representada por uma recta AP'' dupla em grandeza de AP, ou AP'. Generalisando essa designação, as rectas AP, AQ, que teem entre si a relação de dous numeros inteiros m, n, representarão correspondentemente as forças equivalentes a dous grupos de m, e de n forças iguaes, actuando no mesmo sentido, e cada uma dellas representada por uma recta $\frac{AP}{m} = \frac{AQ}{n}$.

Dahi resulta tambem, não como theorema mas como definição, que qualquer numero de forças commensuraveis, que actuão no mesmo sentido, teem uma resultante igual á sua somma, e obrando no mesmo sentido.

Na Statica não podemos formar directamente idea do que sejão forças incommensuraveis, visto que não as podemos comparar com os movimentos que produzem. Entender-se-ha pois que a força designada pela recta incommensuravel AP, é uma força cuja intensidade é comprehendida entre as intensidades de duas forças commensuraveis AP', AP'', sendo a grandeza da primeira recta comprehendida entre as grandezas das ultimas, e differindo destas menos que qualquer quantidade assignavel.

Esta definição, e a convenção acima feita para a representação das forças commensuraveis, conduzem-nos a reconhecer, que a resultante de duas forças AP, AP', que actuão no mesmo sentido, será uma recta $AR = AP + AP'$, mesmo quando alguma destas ultimas forças, ou ambas ellas forem incommensuraveis a respeito das outras forças que se considerão no systema. Com effeito como cada uma das forças AP, AP' é comprehendida entre duas forças commensuraveis tão proximas della quanto se queira, a resultante AR daquellas será comprehendida entre duas forças commensuraveis designadas por duas rectas, que entre si comprehendão $AP + AP'$, e que sejão indefinidamente proximas desta somma: logo pelo raciocinio indirecto, que se costuma empregar nestes casos, concluir-se-ha rigorosamente $AR = AP + AP'$.

Conseguintemente para um numero qualquer de forças AP, AP', etc. applicadas a um ponto material, e que a-

ctuão no mesmo sentido, será absolutamente geral a definição da resultante AR desse systema, traduzida pela equação

$$AR = \Sigma AP.$$

3. Por meio das convenções precedentes passa-se facilmente dos postulados experimentaes [§ 1] para os theoremas que nos servirão de introducção á theoria dos binarios. Concluir-se-ha por tanto

1.° Uma força póde transportar-se a qualquer ponto da sua direcção, sendo invariavelmente ligados o primeiro, e o segundo ponto de applicação [§ 1, 2°, 5°].

2.° As forças applicadas a um ponto material, e que actuão na direcção de uma recta, e em sentidos contrarios, teem uma resultante igual á sua *somma algebrica* [§ 2, § 1, 5°, 2°].

3.° Um systema qualquer de forças, e o que resulta de, nos mesmos pontos de applicação, tomar em sentido contrario cada uma dessas forças, produzem o equilibrio [§ 1, 5°, 2°].

4.° Se dous systemas de forças são equivalentes, isto é, taes que applicados separadamente a um corpo produzem nelle o mesmo effeito; tomando em sentido contrario as forças de um delles, os dous systemas resultantes equilibrão-se no dito corpo, e reciprocamente.

Com effeito, designando por S, S' os dous systemas equivalentes; por $-S'$ o systema que resulta de tomar em sentido contrario as forças de S'; pelo signal $=$ a equivalencia; e por zero o equilibrio; veremos que se for $S=S'$ teremos [§ 1, 3°] $S, -S'=S', -S'=0$ [§ 3, 3°]: e reciprocamente se for $S, -S'=0$, será $S=S, S', -S' = S'$.

5.° Se os systemas S, S' forem equivalentes em relação a um corpo, sel-o-hão em relação a outro qualquer, isto é, a equivalencia dos systemas de forças é independente do corpo a que são applicados.

Porquanto de $S=S'$ em um corpo resulta $S, -S'=0$ no mesmo corpo; esta ultima igualdade subsiste [§ 1, 1°] mudando o corpo a que estão applicados $S, -S'$; logo, pelo theorema precedente, será para qualquer corpo $S=S'$.

6.° Pelo theorema precedente se generalisa a proposição § 3, 2° para o caso das forças applicadas a differen-

tes pontos de uma recta, e que obrão na direcção della, constituindo essa recta parte de um corpo qualquer.

7.° Se S, S' são equivalentes em relação a um corpo sollicitado pelo systema de forças S'', sel-o-hão tambem em relação a esse ou outro corpo sollicitado pelo systema S'''.

Com effeito de S, $S''=S'$, S'' conclue-se [§ 1, 3°] S, S'', $-S''=S'$, S'', $-S''$, ou $S=S'$, e desta S, $S'''=S'$, S'''.

8.° Duas forças cujas direcções não coincidem n'uma só recta, não podem equilibrar-se, nem ser equivalentes.

O equilibrio é impossivel, porque tornando fixo um ponto da direcção de uma das forças, que não seja a intersecção dellas, a outra força não passa por esse ponto [§ 1, 6°]. Da impossibilidade do equilibrio se conclue immediatamente a impossibilidade da equivalencia [§ 3, 4°].

9.° As forças concorrentes AP, AQ [fig. 1ª] applicadas a um ponto material A teem uma resultante situada no plano PAQ.

Não se equilibrando P, Q, a sua acção simultanea deve corresponder ao effeito de uma só força [§ 1, 7°]. Esta não póde estar situada fóra do plano PAQ; porquanto suppondo que essa resultante era AR, que corta o plano PAQ, e lhe não é perpendicular, e tomando as forças P', Q' iguaes, e em sentido contrario a P, Q, e $AR'=AR$, sendo estas duas rectas symetricamente collocadas em relação aos systemas P, Q, e P', Q', e da mesma parte do plano PAQ, como $R=P$, Q, será [§ 1, 3°] a força $R'=P'$, Q': logo R, $R'=P$, Q, P', $Q'=0$, o que é impossivel, pois que R, R' não são directamente oppostas. O absurdo subsistiria se R fosse perpendicular ao plano, por isso que R, R' actuarião então no mesmo sentido. Conclue-se tambem que a resultante de P, Q existe no plano PAQ, quando A faz parte de um corpo qualquer.

10.° Se AP, AQ são iguaes, a sua resultante AS biseeta o angulo PAQ, e tem o sentido AS.

Porquanto se podesse ser AR equivalente ás duas P, Q, fazendo $Q'AR'=PAR$, e $AR'=AR$, AR' tambem seria equivalente a P, Q, isto é, serião equivalentes R, R', o que é absurdo.

Em segundo logar devendo ser iguaes, de sentido contrario, e actuando na direcção SAS', as resultantes dos

dous systemas $[P, Q]$, $[P', Q']$, é evidente que serão AS, AS' respectivamente os sentidos dessas resultantes.

11.° Sendo desiguaes as duas forças AP, AQ [fig. 2] não póde a sua resultante ter uma direcção AR não comprehendida no angulo PAQ.

Pois que fazendo gyrar 180° o systema P, Q, R sobre a recta AS perpendicular a AR, teriamos $R'=P'$, Q', e R, $R'=P$, P', Q, Q', o que é impossivel, por isso que os dous ultimos systemas teem uma resultante no sentido AS, ao passo que R, $R'=0$.

12.° Sendo AS a direcção da resultante de P, Q, não póde ser AS', prolongamento de AS, o sentido della.

Porque sendo AS' a grandeza dessa resultante, e gyrando 180° o systema P, Q sobre a recta AS', teriamos $2S'=P$, P', Q, Q', o que é impossivel, visto que a resultante das ultimas forças tem o sentido AS.

13.° Crescendo, ou diminuindo uma das componentes P, Q, a resultante aproxima-se da força que augmentou, ou affasta-se da que diminuio [11°, 12°].

4. Suppostos os principios precedentes passaremos a fazer a exposição da theoria dos binarios.

Pelo theorema § 3, 8° um binario não póde produzir o equilibrio. Podemos tambem reconhecer facilmente que um binario não póde ser equivalente a uma só força; pois que do contrario, como o binario AP, BQ [fig. 3] se póde deslocar parallelamente no seu plano, correndo ao longo da direcção de qualquer das forças, seguir-se-hia [§ 3, 8°] que essa resultante seria parallela ás forças P, Q; depois fazendo gyrar 180° o systema $PABQ$ sobre uma recta perpendicular a esse plano, e passando por C meio da recta AB perpendicular ás forças P, Q, reconheceriamos haver outra resultante com a direcção da primeira e de sentido contrario, o que é impossivel, coincidão ou não essas duas forças na direcção de uma só recta.

5. Um caso mui simples do equilibrio de dous binarios de *sentido contrario* $[AQ, BP]$, $[AP, BQ]$, [fig. 4] é quando elles constituem um rhombo PQ, pois que nesse caso os dous grupos de forças que actuão em A, e B equivalem a duas resultantes iguaes actuando na direcção AB, e em sentidos contrarios.

6. Dahi se conclue immediatamente o equilibrio dos binarios de sentido contrario $[AQ, BP]$, $[AP, BQ]$, [fig. 5]

que constituem o parallelogrammo AB, cujos lados são commensuraveis. Para o reconhecer, supponhamos

$$AP : AQ : : m : n,$$

sendo m, n inteiros: dividão-se AP, AQ respectivamente em m, e n partes iguaes; pelos pontos de divisão de cada uma daquellas linhas tirem-se parallelas á outra; o parallelogrammo AB ficará dividido em mn rhombos iguaes. Imaginemos que cada um desses rhombos é sollicitado por quatro forças, representadas em grandeza e em direcção pelos seus lados, e tendo sentidos correspondentes aos das forças AP, AQ, BP, BQ do parallelogrammo total, isto é, em cada rhombo actuando a força do lado superior da esquerda para a direita; a da esquerda de cima para baixo, e actuando em sentidos respectivamente contrarios a parallela á primeira, e a parallela á segunda. Ver-se-ha pois que as forças dos rhombos, que coincidem com os lados AP, AQ, BP, BQ constituem, pela sua reunião, as quatro forças, que primeiro supposemos applicadas ao parallelogrammo AB; e que as forças interiores destroem-se duas a duas em cada lado commum a dous rhombos; logo as $4mn$ forças elementares equivalem ás quatro AP, AQ, BP, BQ; mas as quatro forças de cada rhombo equilibrão-se [§ 5]; logo o mesmo acontecerá ás forças AP, AQ, BP, BQ.

7. Se os lados AP, AQ [fig. 6] fossem incommensuraveis, dar-se-hia ainda o equilibrio entre as quatro forças AP, AQ, BP, BQ. Com effeito poderiamos tomar PP', Pp menores que qualquer quantidade proposta, e taes que fossem commensuraveis AQ, AP', e PP', Bp: e tirando pelos pontos P', p parallelas aos lados AQ, AP, poderiamos substituir ás quatro forças dadas as doze correspondentes aos lados dos tres parallelogrammos em que AB ficaria dividido, sendo os sentidos das forças de cada parallelogrammo componente analogos aos das forças correspondentes no parallelogrammo total. Supposto isto, ver-se-ha que as forças respectivas aos parallelogrammos QP', $p'B$ equilibrão-se [§ 6]; logo as quatro forças dadas AP, AQ, BP, BQ equivalem ás quatro correspondentes ao parallelogrammo $P'p$; e como é licito suppor os lados deste parallelogrammo tão pequenos, quanto se queira, infinitamente pequenos mesmo, seguir-se-ha que as forças dadas devem forçosamente equilibrar-se.

8. A proposição do § precedente póde demonstrar-se indirectamente do seguinte modo. Se as forças AP, AQ [fig. 7] são incommensuraveis, e é possivel não serem equilibradas pelas forças BQ, BP respectivamente iguaes, e parallelas, não poderá a resultante das duas primeiras ter a direcção da diagonal AB; aliás a resultante de BQ, e BP teria tambem a direcção dessa linha, e essas duas resultantes serião iguaes e contrarias, e por tanto equilibrar-se-hião. Supponhamos pois ser AR a resultante de AP, AQ: pela semelhança deste systema de forças com o systema BQ, BP, estas ultimas terão $BR' = AR$ como resultante, a qual fará o angulo $ABR' = BAR$. De A tire-se para o prolongamento de PB uma recta AB', que fique comprehendida no angulo BAR, e que faça $B'P$ commensuravel com AP: completando o parallelogrammo PQ', e suppondo-o actuado por quatro forças AP, AQ', $B'P$, $B'Q'$, estas forças produzirão o equilibrio: logo a resultante de AP, e AQ' terá a direcção AB', e a de $B'Q'$, $B'P$ a direcção $B'A$, pois que se, á semelhança do que supposemos no parallelogrammo PQ, as duas resultantes em PQ' actuassem dos dous lados da diagonal AB', o binario constituido por essas resultantes não podia produzir o equilibrio. Ora sendo AR a resultante de AP, AQ, a resultante de AP, AQ' não póde tomar a direcção AB'; logo não é admissivel a hypothese de se não equilibrarem as quatro forças do parallelogrammo PQ.

9. Pelo que ultimamente temos demonstrado se reconhece, que qualquer binario AP, BQ [fig. 8] é equivalente ás quatro forças Ap, pq, qQ, QA, sendo $Ap = qQ = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}AQ$; com effeito as duas forças do binario, tomadas em sentido contrario, é facil de ver que equilibrão com as quatro forças correspondentes aos lados do parallelogrammo pQ, pois que essas seis forças se reduzem ás quatro pA, Qq, QA, pq, as quaes se equilibrão [§§ 6, 7].

10. Um binario póde transportar-se no espaço para uma posição qualquer, em que as forças se conservem parallelas á direcção primitiva, suppondo que os pontos de applicação das forças nas duas posições se achão todos ligados invariavelmente.

Seja dado vg. o binario $2AB$, $2CD$ [fig. 9], que substituiremos pelo parallelogrammo $ABCDA$, cujos lados representão quatro forças que actuão no sentido indicado pela

successão daquellas lettras. No plano de AC, ou n'um plano parallelo áquelle, imagine-se um parallelogrammo $A'C'$ igual ao primeiro, cujos lados são parallelos aos de AC, e representão forças, cujo sentido é correspondentemente o mesmo que no systema $ABCD$. A equivalencia dos systemas AC, $A'C'$ fica demonstrada, uma vez que provemos, que ha equilibrio nos systemas de forças $ABCDA$, $A'D'C'B'A'$. Ora unindo por rectas os pontos A, A', B, B', C, C', D, D', é claro que o binario BC, $C'B'$ equivale ao binario CC', $B'B$; que o binario CD, $D'C'$ equivale a DD', $C'C$, e assim dos outros dous binarios; logo, assim como na aresta CC', teremos nas outras tres DD', AA', BB' grupos de duas forças que se equilibrão, e por isso os systemas $ABCDA$, $A'D'C'B'A'$ equilibrão-se tambem.

11. Um binario póde deslocar-se de qualquer modo no espaço, comtanto que nas duas posições sejão parallelos os planos dos dous binarios, e os quatro pontos de applicação das forças sejão ligados invariavelmente.

Em virtude da proposição do § precedente transporte-se parallelamente um dos binarios para o plano do outro: sejão pois AP, BQ, e $A'P'$, $B'Q'$ [fig. 10] os dous binarios cuja equivalencia devemos demonstrar, e em que é $AP=BQ=A'P'=B'Q'$, e a distancia das duas primeiras linhas igual á das duas ultimas. A equivalencia dos dous binarios estaria demonstrada pelo § antecedente, se AP, $A'P'$ fossem parallelas. Suppondo porêm que essa circumstancia se não verifica, prolonguemos $A'P'$, $Q'B'$ até encontrarem os prolongamentos de AP, QB: unão-se por uma recta as intersecções M, N; supponhamos que as forças BQ, $B'Q'$ se deslocárão na sua direcção até que PB, $P'B'$ sejão parallelas a MN; e completem-se os parallelogrammos AB, $A'B'$, que deverão ter a mesma area, pois que são iguaes as bases AP, $A'P'$, e as alturas correspondentes; mas $PB=MN=P'B'$; logo a distancia das duas rectas PB, AQ é igual á distancia das duas $P'B'$, $A'Q'$, e por conseguinte [§ 10] são equivalentes os binarios PB, QA, e $P'B'$, $Q'A'$; mas estes são respectivamente equivalentes aos binarios dados AP, BQ, e $A'P'$, $B'Q'$; dar-se-ha pois tambem a equivalencia entre estes ultimos.

12. Denomina-se *braço* de um binario a recta tirada perpendicularmente entre as direcções das suas forças; e *momento* do binario o producto do seu braço, e de uma das

forças. Isto supposto, demonstraremos agora que dous binarios são equivalentes, se os seus planos forem parallelos, se ambos elles *tenderem a produzir rotações no mesmo sentido*, se tiverem momentos iguaes, e forem invariavelmente ligados os pontos de applicação das forças. Sejão AP, BQ, e $A'P'$, $B'Q'$ [fig. 11] dous binarios em que essas hypotheses se verificão; entre as direcções das forças do primeiro, e do segundo podem-se tirar duas rectas iguaes AQ, $A'Q'$, comtanto que cada uma seja igual ou maior que o maior dos dous braços dos binarios dados; tomem-se A, A' por pontos d'applicação das forças P, P', deslocando-as se for necessario na sua direcção; semelhantemente tomem-se Q, Q' para extremos das forças correspondentes; completem-se os parallelogrammos AB, $A'B'$, que serão iguaes em area, pela supposta igualdade dos dous momentos; logo por ser $AQ = A'Q'$, será a distancia entre AQ, PB igual á de $A'Q'$, $P'B'$; logo o binario $Q'A'$, $P'B'$ resulta da deslocação do binario QA, PB, authorisada [§§ 10, 11], e por tanto esses binarios são equivalentes; e como se podem aos dous ultimos substituir respectivamente $A'P'$, $B'Q'$, e AP, BQ, conclue-se que tambem estes são equivalentes.

13. Como a acção de um binario qualquer é determinada simplesmente pela direcção do plano em que elle está situado, pelo sentido em que tende a produzir rotação, e pela grandeza do seu momento, os binarios representão-se com simplicidade por uma recta, que se denomina *eixo*, que se toma perpendicular ao plano do binario, tendo uma grandeza, desde a sua origem até ao extremo, proporcional ao momento, e estando situada, em relação ao plano do binario, para o lado em que collocado um observador, com os pés sobre o plano, veria effeituar-se da esquerda para a direita o movimento de rotação devido ao binario. As proposições que demonstrámos relativamente á translação, e transformação dos binarios, reduzem-se por tanto a que dous binarios são equivalentes, quando os seus eixos são parallelos, da mesma grandeza e sentido, e se suppõe invariavelmente ligados os pontos de applicação das forças.

14. Um binario substitue-se como vimos [§ 9] por quatro forças representadas pelos quatro lados de um parallelogrammo, cujo plano é parallelo ao do binario, obrando aquellas forças *continuamente* ao longo do perimetro, e sendo a area do parallelogrammo igual a metade do mo-

mento do binario. Esse parallelogrammo póde pois substituir-se por outro qualquer, semelhantemente actuado por forças representadas pelos lados, uma vez que os planos dos dous parallelogrammos sejão parallelos, que as suas areas sejão iguaes, e que as forças em ambos tendão a produzir rotações no mesmo sentido.

15. Dahi se conclue immediatamente o modo de reduzir a um só um systema de binarios de eixos parallelos. Supponhamos primeiro que estes tem o mesmo sentido. Sejão M, M', M'' etc. os respectivos momentos; representem-se os binarios por rectangulos actuados por forças correspondentes aos lados, tendo todos um lado igual. Esses rectangulos podem deslocar-se; e reunir-se de modo, que coincidão dous a dous os lados iguaes, sem que as areas se sobreponhão: as forças correspondentes a esses lados iguaes coincidentes destroem-se, e teremos um só rectangulo actuado por forças correspondentes aos lados. Sendo pois A a area desse rectangulo total, e A, A', etc. as dos componentes, é

$$A = \Sigma A;$$

e multiplicando por 2, e chamando M o momento do binario resultante, acha-se

$$M = \Sigma M.$$

Se além dos binarios M, M' etc. houver outros N, N', etc. actuando em sentido contrario, será o momento resultante destes

$$N = \Sigma N.$$

Para reduzir a um só os dous binarios M, N, supponhamos que os respectivos rectangulos tem bases iguaes; faça-se coincidir essas bases de modo que haja sobreposição das areas. Então ficarão destruidas as forças correspondentes aos lados coincidentes, e teremos um rectangulo cuja area é a differença das duas sobrepostas, e cujo dobro dá o momento do binario resultante dos dous M, N, e o sentido de cuja rotação será a daquelle desses dous que tem maior momento.

Se affectarmos do signal — os binarios N, N', etc., a somma algebrica destes, e dos binarios M, M' etc. dará a grandeza do binario resultante total, indicando o signal des-

ta somma o sentido correspondente desse binario resultante.

Conclue-se pois finalmente, que o binario resultante de um systema qualquer de binarios cujos eixos são parallelos, será determinado reunindo n'um ponto commum as origens de todos os eixos, e compondo-os como se fossem forças.

16. Supponhamos um triangulo ABC [fig. 12] actuado por tres forças representadas pelos seus lados, e que obrão no sentido indicado na figura. Applicando ao vertice B duas forças BD, BD' parallelas a AC, iguaes a esta, e de sentido contrario, o systema dado ficará substituido por um binario *directo* BD, CA, cujo momento é o dobro da area ABC, e por tres forças applicadas ao ponto B, correspondentemente iguaes, e parallelas ás primeiras tres forças dadas, e do mesmo sentido destas. Fazendo construcções semelhantes nos vertices C, A, teremos outras duas transformações analogas do systema dado, e que se reduzem a obtermos binarios equivalentes ao primeiro, e systemas de tres forças applicadas a C, ou a A, os quaes são o systema primitivo AB, BC, BD' transportado parallelamente a esses pontos. Para que as tres transformações sejão equivalentes, como é forçoso, é necessario que aquellas tres forças se equilibrem, pois se ellas tivessem uma resultante, essa poderia ser applicada, n'uma determinada direcção, a qualquer dos pontos A, B, C, o que é impossivel, visto que estes pontos se não achão em linha recta. Logo o systema das tres forças AB, BC, CA equivale a um binario directo BD, CA, cujo momento é o dobro da area ABC.

17. O demonstrado equilibrio das tres forças AB, BC, BD' dá-nos immediatamente a resultante de duas forças quaesquer concorrentes, donde se concluem facilmente as equações do equilibrio e da composição de um systema qualquer de forças applicadas a um ponto; mas como todos esses principios nos não são necessarios para deduzir a composição e equilibrio dos binarios, prescindiremos neste logar de dar mais desenvolvimento a esse objecto.

18. Denominaremos *ternario* o systema de tres forças AB, BC, CA representadas pelos tres lados de um triangulo, e cujo sentido é designado pelo movimento continuo de um ponto percorrendo o perimetro. O systema de quatro forças AB, BC, CD, DA, que constituem os lados de um quadrilatero, será denominado *quaternario*, e

em geral chamaremos *multinario*, o systema de forças representadas pelos lados de um polygono.

19. Um multinario qualquer equivale a um binario, cujo momento é o dobro da area do multinario. Com effeito suppondo convexo o polygono, tomando nelle um ponto interior qualquer O, e tirando deste rectas para os vertices, ficará o polygono dividido em tantos triangulos, quantos são os seus lados. Considerando os triangulos como ternarios, todos directos, ou todos inversos, conforme for directo, ou inverso o multinario dado, ver-se-ha que se destroem os grupos de cada duas forças applicadas a qualquer das rectas que partem de O: logo a reunião dos ternarios equivale ao multinario dado; mas cada ternario equivale a um binario cujo momento é o dobro da area do triangulo: logo finalmente o multinario será representado por um binario cujo momento é o dobro da area do respectivo polygono.

Se o polygono tiver quaesquer reintrancias, poderá decompor-se por meio de seccantes em multinarios convexos, cada um dos quaes é representado por um binario tendo por momento o dobro da area respectiva. A mesma substituição terá logar por tanto no multinario total. Se as reintrancias forem taes que os lados do polygono se cortem, o respectivo multinario se poderá sempre considerar como a reunião de varios multinarios do mesmo, ou de differente sentido, cujas areas se sobrepõem, ou são distinctas.

20. Generalisando a concepção precedente podemos considerar os multinarios curvilineos, que são os systemas que resultão da reunião de forças infinitesimas representadas pelos elementos successivos de uma curva de simples curvatura. O binario equivalente terá tambem por momento o dobro da area respectiva.

21. Um polyedro permanece em equilibrio, se as suas faces forem outros tantos multinarios, todos do mesmo sentido para o observador que se collocar no lado externo de cada face, ou por outra, se forem dirigidos simultaneamente para a parte externa, ou interna os eixos de todos os binarios equivalentes aos multinarios das faces.

Com effeito cada aresta achar-se-ha sollicitada por duas forças iguaes e contrarias.

22. Um prisma achar-se-ha em equilibrio, se for sollicitado por quaternarios correspondentes ás faces lateraes, sendo todos os eixos dos binarios respectivos dirigidos para o

exterior ou interior do solido. Com effeito o equilibrio dá-se, pelo § antecedente, juntando ao prisma os multinarios correspondentes ás bases; e estes dous multinarios é claro que se equilibrão, por serem parallelos, iguaes, e de sentido contrario.

23. Pelo § precedente faremos facilmente a composição de dous binarios quaesquer de planos não parallelos.

Seja AB [fig. 13] a intersecção dos planos dos binarios dados; represente-se cada um delles por um quaternario parallelogrammo; transformem-se e desloquem-se estes quaternarios de modo, que venha a ser AB lado commum a ambos elles. Então os dous quaternarios BD, BF poderão ter ambos os eixos simultaneamente exteriores, ou interiores ao angulo diedro DAF, ou um interno, e outro externo. No primeiro caso o sentido das forças correspondentes aos lados AD, AF será em uma dellas divergente, e na outra convergente em relação ao ponto A. Suppondo pois vg. ambos os eixos dos binarios dados exteriores ao diedro, o quaternario DE, cujo eixo é tambem exterior, fará equilibrio áquelles; logo esse quaternario, com o eixo interior, representará o binario resultante. Os momentos dos binarios componentes, e o do resultante serão respectivamente os dobros das areas BD, BF, ED.

Se os dous binarios componentes tiverem um dos eixos externo, e outro interno ao diedro, as forças AD, AF serão ambas convergentes, ou ambas divergentes em relação ao ponto A. Se vg. forem AD, AF os sentidos de cada uma dellas, o binario resultante será representado pelo quaternario parallelogrammo diagonal, passando por AB, do parallelipipedo determinado pelas faces BD, BF. Com effeito bisectem-se em G, H as linhas DF, CE; os dous prismas triangulares BHD, BHF supponhão-se actuados por multinarios correspondentes ás faces, sendo no primeiro prisma todos os eixos externos, e no segundo todos interiores. Haverá equilibrio em cada um dos prismas. Ora os dous quaternarios DH, GE equilibrão-se, e bem assim os ternarios que compõem as bases totaes DAF, CBE; logo os dous binarios dados equilibrão com dous quaternarios iguaes e coincidentes com GB, tendo cada um o sentido GA: e por conseguinte o dobro do quaternario GB, com o sentido AG, será o resultante dos dous binarios dados, que teem

os sentidos AD, AF. O dobro do quaternario $AGHB$ é visivelmente o plano diagonal acima indicado.

24. A composição de dous binarios effeitua-se mui simplesmente por meio dos eixos. Actuem os dous binarios dados nos sentidos AD, AF; sejão rectangulos os parallelogrammos BD, BF; e BL, BM os eixos dos dous binarios dados; será o angulo $LBM = CBE$; e como é

$$LB : BM : : DB : BF : : BC : BE,$$

sendo BH' a diagonal do parallelogrammo, que tem BC, BE por lados contiguos, e BN a diagoual do parallelogrammo LM, teremos

$$BL : BM : BN : : BC : BE : BH';$$

e como BN, por ser perpendicular a BA e BH', é o sentido do eixo do quaternario resultante $G'B$, concluir-se-ha finalmente que o eixo do binario resultante de dous binarios dados representa-se em grandeza e em direcção pela diagonal de um parallelogrammo, que tem por lados contiguos os eixos dos dous binarios componentes.

Se o sentido do quaternario BF fosse FA, a construcção precedente devia fazer-se começando por deslocar parallelamente esse quaternario, de modo que FE coincidisse com AB.

25. Para compor qualquer numero de binarios situados de qualquer modo no espaço, reunir-se-hão todas as origens dos eixos n'um só ponto, e compor-se-hão depois os eixos dous a dous pelo principio precedente.

26. Da composição de dous binarios por meio dos eixos se conclue immediatamente que, se reunirmos as origens dos eixos de tres binarios quaesquer, a diagonal do parallelipipedo, que tem aquellas tres linhas por arestas contiguas, será o eixo do binario resultante dos tres dados.

27. Supondo pois que os eixos de qualquer numero de binarios B, B', B'', etc. se decompõem em relação a tres eixos rectangulares; sendo α, β, γ, α', β', γ', etc. os angulos que cada eixo dos binarios fórma com os eixos de decomposição; a, b, c os angulos que com estes eixos fórma o eixo do binario resultante; chamando Q a grandeza des-

te; L, M, N os componentes do seu eixo em relação aos eixos de decomposição, teremos

$$L = Q \text{ Cos } a;\ M = Q \text{ Cos } b;\ N = Q \text{ Cos } c;$$

$$Q = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

$$L = \Sigma B \text{ Cos } \alpha;\ M = \Sigma B \text{ Cos } \beta;\ N = \Sigma B \text{ Cos } \gamma.$$

28. Para que os binarios dados se equilibrem deverá ser $Q = 0$, isto é

$$L = M = N = 0;\ \text{ou}$$

$$\Sigma B \text{ Cos } \alpha = \Sigma B \text{ Cos } \beta = \Sigma B \text{ Cos } \gamma = 0.$$

29. Se supposermos um systema invariavel sollicitado por quaesquer forças, cada uma destas póde substituir-se pela mesma força transportada parallelamente, e applicada a um ponto determinado, e por uma força igual e directamente contraria a esta ultima, e applicada ao mesmo ponto. Fazendo uma transformação analoga para todas as forças dadas, o systema destas é substituido por outro formado de todas essas forças transportadas a um ponto arbitrariamente tomado, e por tantos binarios, quantas são as forças transportadas. As forças e os binarios reduzem-se, como sabemos, a uma só força, e a um só binario.

30. As equações da composição dos binarios [§ 27] podião referir-se a tres eixos obliquos; e então em vez de empregarmos os tres componentes $B \text{ Cos } \alpha$, $B \text{ Cos } \beta$, $B \text{ Cos } \gamma$, teriamos os componentes L_1, M_1, N_1 parallelos aos eixos obliquos, isto é, acharíamos

$$L = \Sigma L_1;\ M = \Sigma M_1;\ N = \Sigma N_1;$$

$$Q = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 + 2LM \text{ Cos } XY + 2LN \text{ Cos } XZ + 2MN \text{ Cos } YZ}.$$

31. Os componentes de um binario em vez de se referirem, por meio do seu eixo, a tres eixos obliquos, podem referir-se com mais vantagem aos planos coordenados, que correspondem a esses eixos, isto é, podem determinar-se os tres binarios componentes do binario dado, e cujos planos existão nos tres planos coordenados. Para que esses

tres componentes subsistão é necessario, que o plano do binario dado não seja parallelo a nenhum dos eixos coordenados.

Supponhamos primeiro que essa condição se verifica. Deslocando-se parallelamente o plano do binario dado, é claro que se poderá achar uma posição ABC [fig. 14] desse plano tal, que o ternario ABC seja igual em intensidade ao binario dado. Os pontos de intersecção A, B, C podem suppor-se situados nos eixos positivos, ou nos negativos. Isto supposto, é facil de ver que se o sentido do binario dado for ABC, elle fará equilibrio com os tres ternarios OCB, OAC, OBA, situados nos planos coordenados, e que constituem as faces do tetraedro $ABCO$, e cujo sentido é tal, que as forças delles existentes nos lados AB, BC, CA são contrarias ás correspondentes do ternario dado. Logo este é o resultante de tres ternarios de igual intensidade áquelles, e cujo sentido seja tal, que as forças delles existentes nos lados AB, BC, CA sejão do mesmo sentido que as do ternario dado.

32. Os tres ternarios componentes são pois as projecções obliquas do triangulo ABC nos tres planos coordenados, sendo o sentido desses ternarios tal, que o movimento continuo entre os vertices de cada projecção, movimento que dá o sentido das forças entre esses pontos, é exactamente correspondente ao movimento nos vertices respectivos do ternario dado.

Supponhamos agora que o ternario ABC se desloca no espaço, conservando-se as forças parallelas ás direcções primitivas; é claro que os ternarios componentes nos tres planos não varião, e que não varião tambem nem em grandeza, nem em figura as projecções obliquas de ABC sobre aquelles planos; logo se, feito qualquer deslocamento em ABC, for $A'B'C'$ a projecção daquelle triangulo n'um dos planos coordenados, sendo as lettras accentuadas projecções das não accentuadas, $A'B'C'$ será o ternario componente de ABC, e situado naquelle plano coordenado, representando A', B', C' o sentido desse componente, se tambem representar A, B, C o sentido do ternario dado.

Tambem se reconhece facilmente, que se ao ternario ABC substituirmos outro DEF de igual superficie, parallelo ao primeiro, e do mesmo sentido, os seus componentes

nos tres planos, bem como as tres projecções do triangulo DEF são iguaes ás que tinhamos no primeiro caso, e o sentido desses ternarios componentes será dado pela ordem das projecções dos vertices do ternario dado, correspondente ao sentido do movimento nesse ternario.

33. Se o ternario dado fosse parallelo a um dos eixos, não podiamos fazer a decomposição indicada por meio do tetraedro da fig. 14, mas executal-a-hiamos facilmente por meio do prisma triangular fig. 13. Com effeito se o plano do binario dado fosse parallelo á intersecção AB de dous planos coordenados BD, BF, cortariamos esses planos por um plano qualquer DE parallelo ao do binario dado, e nelle formariamos, por meio de rectas parallelas ao terceiro plano coordenado, um quaternario parallelogrammo DE de intensidade igual á do binario dado; e então sendo $CDFE$ o sentido desse binario, serião $CDAB$, $FEBA$ os sentidos dos componentes. Imitando em tudo o raciocinio do § precedente, concluiriamos geralmente, que os dous quaternarios componentes de um quaternario parallelogrammo dado parallelo á intersecção de dous planos coordenados, em que devem existir aquelles componentes, são dados pelas projecções obliquas do quaternario dado sobre aquelles planos, sendo o sentido nesses componentes dado pela ordem das lettras dos vertices correspondentes aos do quaternario dado. E' claro que no terceiro plano coordenado a projecção, bem como o componente são nullos.

Dividindo pois o quaternario dado, por meio de uma das diagonaes, em dous ternarios iguaes e do mesmo sentido, concluir-se-ha facilmente que os componentes de cada ternario são tambem as projecções do respectivo triangulo nos planos coordenados.

Finalmente se o ternario dado for parallelo a um dos planos coordenados, a sua projecção nesse plano dará um ternario igual e do mesmo sentido.

34. Como um multinario qualquer se póde dividir em ternarios do mesmo sentido, concluir-se-ha geralmente que um multinario $ABCD$ etc., situado de qualquer modo no espaço, decompor-se-ha em multinarios $A'B'C'D'$ etc., $A''B''C''D''$ etc., $A'''B'''C'''D'''$ etc. situados em tres planos obliquos, fazendo as projecções dos vertices do multinario dado parallelamente ás intersecções daquelles planos, e in-

dicando a ordem das lettras projecções os sentidos dos multinarios componentes.

35. Para representarmos de um modo analytico e geral os tres binarios componentes de um binario qualquer dado, e situados em tres planos obliquos, substituamos o binario dado por um ternario, e supponhamos primeiro que um dos vertices deste existe na origem O [fig. 15] intersecção dos tres planos coordenados de projecção. Seja pois ABO esse ternario; $A'B'O$ a sua projecção no plano xy, designando a ordem das lettras A, B o sentido desses dous ternarios. Se os eixos coordenados OX, OY fossem rectangulares, chamando M o momento do binario equivalente a $OA'B'$, teriamos

$$M = OA' \,.\, OB' \operatorname{Sen} (XOB' - XOA').$$

Esta equação não só dará a grandeza do momento, mas tambem o sentido da acção do respectivo binario, isto é, achar-se-ha M positivo, ou negativo, conforme a rotação que o binario tende a produzir for no sentido de OX para OY, ou no de OY para OX.

Sendo x, y as coordenadas de A'; x', y' as de B', teremos

$$OA' \operatorname{Sen} XOA' = y;\ OA' \operatorname{Cos} XOA' = x;\ OB' \operatorname{Sen} XOB' = y';\ OB' \operatorname{Cos} XOB' = x';$$

equações que mudarão a precedente em

$$M = xy' - yx'.$$

Supponhamos agora que, conservando fixo o eixo OX, o eixo OY deixa de ser perpendicular áquelle; representemos por ω o angulo dos dous eixos; x, y, x', y' mudar-se-hão em x_1, y_1, x_1', y_1', e teremos

$$x = x_1 + y_1 \operatorname{Cos} \omega;\ y = y_1 \operatorname{Sen} \omega;$$

$$x' = x_1' + y_1' \operatorname{Cos} \omega;\ y' = y_1' \operatorname{Sen} \omega.$$

Substituindo estes valores na equação precedente, reduzindo, e supprimindo os accentos inferiores, acharemos

$$M = \operatorname{Sen} \omega \ (xy' - x'y),$$

isto é, uma equação analoga á que corresponde ao caso dos eixos rectangulares, com a só differença da introducção do factor Sen ω.

Sendo pois, em relação a tres eixos obliquos, x, y, z, x', y', z' as coordenadas dos vertices A, B do ternario dado, os seus componentes nos tres planos coordenados serão

$$M = \text{Sen } XY\,(xy' - x'y);$$

$$M' = \text{Sen } YZ\,(yz' - y'z);$$

$$M'' = \text{Sen } ZX\,(zx' - z'x).$$

Estas formulas transformão-se immediatamente nas que teem logar, quando o vertice C do ternario ABC não coincide com a origem O. Neste caso sendo x'', y'', z'' as coordenadas de C, devemos naquellas formulas por x, y, z, x', y', z' substituir $x - x''$, $y - y''$, etc., e teremos

$$M = \text{Sen } XY\,\Big((xy' - yx') + (x'y'' - y'x'') + (x''y - y''x)\Big);$$

$$M' = \text{Sen } YZ\,\Big((yz' - zy') + (y'z'' - z'y'') + (y''z - z''y)\Big);$$

$$M'' = \text{Sen } ZX\,\Big((zx' - xz') + (z'x'' - x'z'') + (z''x - x''z)\Big).$$

36. Se nos fossem dados muitos ternarios ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, etc. situados de qualquer maneira no espaço, suppondo todos os vertices C, C', C'', etc. reunidos na origem O, os tres ternarios totaes situados nos tres planos coordenados serião

$$L = \text{Sen } YZ\,\Sigma\,(yz' - zy');$$

$$M = \text{Sen } ZX\,\Sigma\,(zx' - xz');$$

$$N = \text{Sen } XY\,\Sigma\,(xy' - yx').$$

Semelhantemente teriamos as formulas que correspondem á hypothese de não coincidirem na origem O todos os vertices C, C', C'', etc.

37. Se for dado um systema qualquer de forças AP,

$A'P'$, $A''P''$, etc. com direcções quaesquer no espaço, pelo que vimos [§ 29] esse systema transforma-se em outro, formado por todas as forças transportadas parallelamente a uma origem qualquer O, e por tantos binarios quantas são as forças transportadas. Suppondo pois que cada força P se decompoz parallelamente a tres eixos obliquos passando por O, e sendo X, Y, Z as respectivas componentes; X', Y', Z' as componentes analogas de P', etc.; x, y, z as coordenadas do ponto de applicação A da força P; x', y', z' as coordenadas do ponto de applicação de P', etc.; determinemos analyticamente os momentos dos tres binarios totaes situados nos tres planos coordenados, e que resultão da decomposição de todos os binarios AP, $-OP$, $A'P'$, $-OP'$, etc. em relação aos mesmos planos.

Para o conseguir basta que reflictâmos, que vg. o binario AP, $-OP$ equivale ao ternario OAP; logo, empregando as formulas do paragrapho precedente, devemos em vez de x', y', z' escrever

$$x+X,\ y+Y,\ z+Z;$$

e para os ternarios $OA'P'$, $OA''P''$, etc. accentuaremos devidamente as lettras correspondentes; fazendo pois a substituição e reducção nessas formulas, achar-se-ha

$$L=\text{Sen } YZ\Sigma\ (yZ-zY);$$

$$M=\text{Sen } ZX\Sigma\ (zX-xZ);$$

$$N=\text{Sen } XY\Sigma\ (xY-yX).$$

Sendo rectangulares os eixos, e designando por α, β, γ, α', β', γ', etc. os angulos que fazem com elles as forças dadas, as formulas precedentes transformão-se em

$$L=\Sigma P\ (y\ \text{Cos}\ \gamma-z\ \text{Cos}\ \beta);$$

$$M=\Sigma P\ (z\ \text{Cos}\ \alpha-x\ \text{Cos}\ \gamma);$$

$$N=\Sigma P\ (x\ \text{Cos}\ \beta-y\ \text{Cos}\ \alpha).$$

===