

**HISTORIA**  
**E**  
**MEMORIAS**  
**DA**  
**ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS**  
**DE LISBOA.**

---

*Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.*

---

2.<sup>a</sup> SERIE. TOMO III. PARTE I.



**LISBOA**

NA TYPOGRAPHIA DA MESMA ACADEMIA.

---

1851.

---

---

# MEMORIA

SOBRE A ROTAÇÃO DAS FORÇAS EM TORNO DOS  
PONTOS D'APPLICAÇÃO.

POR

*DANIEL AUGUSTO DA SILVA.*

---

ADVERTENCIA.

---

QUANDO um conjuncto de theoremas se refere a uma theoria mathematica, em que se considerão varios elementos, cujas relações de grandeza podem ser quaesquer; se supposermos que essas relações se simplificação, como por exemplo, se alguns desses elementos se tornão iguaes, ou desaparecem, acontece quasi sempre, que uma parte das proposições, que tinhão uma existencia distincta na theoria geral, perdem esse character de independencia, fundindo-se n'um só theorema, que não apresenta vestigios dos principios diversos, de que elle procedera.

E' o que acontece em relação ao assumpto, de que passamos a tractar.

E' sabido, que se um systema de forças parallelas gy-

rão em torno dos pontos d'applicação, a sua resultante gira no centro das forças, conservando-se sempre parallelas ás componentes.

Mas se supposermos um grupo de forças, que gyrão em torno dos pontos d'applicação, e as quaes em vez de fazerem entre si sómente os angulos  $0^\circ$ , ou  $180^\circ$ , fórmão angulos quaesquer, mas constantes durante a rotação, tere-mos a generalisação do systema precedente, verificando-se então algumas propriedades, que correspondem ao principio das forças parallelas, mas além dessas um grande numero d'outras, que não podem distinguir-se naquelle principio simplicissimo.

Investigar essas propriedades é o objecto da presente Memoria. Julgamos que além do interesse puramente scientifico, que possa ligar-se a esta nova theoria, não deixará ella de ser considerada como susceptivel de uteis applicações.

Parecendo-nos conveniente dar um nome portuguez aos systemas de forças, que Mr. Poinsot introduzio na Statica, propomos a denominação *linario* como equivalente da palavra franceza *couple*.

No excellente tractado de Mechanica Racional do dignissimo Lente da Escola Polytechnica o Sñr. Albino Francisco de Figueiredo emprega-se sem traducção o termo francez, nacionalisando-lho apenas a orthographia. Como porém nos parece indispensavel baptisar na nossa lingua uma concepção hoje admittida geralmente na sciencia, e como a denominação *couple* empregada pelo Sñr. Figueiredo não é admittida na Universidade de Coimbra, onde tambem nos não consta que se tenha definitivamente fixado a traducção do termo francez, julgámos que a palavra *binario* representando de algum modo a noção correspondente, poderá, sendo adoptada pelos homens competentes, fazer entrar no dominio da nossa lingua uma idéa de ha muito introduzida já no ensino das nossas Escolas.

---

---

## INTRODUCCÃO.

---

---

### I.

#### *Definições.*

1. Em um systema de forças, que gyraõ em torno dos pontos de applicação, suppostos fixos, chamaremos a estes pontos *centros das forças*.

2. Consideraremos unicamente entre as rotações que podem ter as forças d'um systema, aquellas que não fazem variar a inclinação reciproca das forças; a esta rotação simultanea das forças chamaremos *rotação systematica*.

3. *Configuração* d'um systema será a disposição que tomão as forças delle para qualquer rotação systematica.

4. *Directrizes* serão chamadas em geral as rectas, que pela sua direcção absolutamente variavel, mas constante em relação ás direcções das forças do systema, determinão cada uma das configurações.

5. Quando as forças gyrantes se achão situadas em um plano, e nelle se conservão em todas as configurações, que se considerão, será directriz sufficiente para determinar todas as configurações uma recta qualquer situada nesse plano, e que gyra simultaneamente com as forças, fazendo estas angulos invariaveis com aquella para todas as configurações.

6. Quando as forças gyrantes em um plano tem resultante, tomaremos especialmente para directriz a mesma re-

sultante ; quando porêm o systema se reduz a um binario, escolheremos para directriz qualquer das forças.

7. Para comprehendêr facilmentê a rotação systematica no espaço, podemos imaginar em um ponto fixo rectas parallelas a todas as forças gyrantes ; depois considerando invariavel este systema auxiliar directriz, e fazendo-o gyra de qualquer modo em torno do ponto fixo, as forças do systema dado devem, para todas as configurações, conservar-se parallelas ás rectas respectivas do systema directriz.

8. As rotações systematicas no espaço definil-as-hemos ordinariamente por um systema de eixos rectangulares, ou obliquos, que gyra em torno d'um ponto de modo que cada força do systema faz tres angulos invariaveis com os eixos *directrizes* para todas as configurações.

9. Quando a rotação systematica se effeitua em um plano, se existe resultante esta será constante em grandeza, e terá a mesma inclinação sobre a directriz para todas as configurações.

10. Quando a rotação systematica se effeitua no espaço, e ha resultante, esta será constante em grandeza, e fará angulos invariaveis com os eixos *directrizes*.

11. Imaginemos uma recta qualquer que faça angulos constantes com os eixos *directrizes* para todas as configurações ; o systema dado dir-se-ha gyra *sobre essa recta*, quando ella se conservar fixa no espaço ; e dir-se-ha gyra *com ella*, quando esta variar de direcção.

12. Qualquer rotação systematica no espaço é pois sempre o resultado de duas rotações, uma com uma recta dada, outra sobre a mesma recta.

13. Quando o systema gyrante no espaço tiver uma resultante, consideraremos geralmente que estas duas rotações se effeituão com e sobre a direcção da resultante.

14. Qualquer rotação systematica é pois definida pela posição de uma *directriz*, e pelo angulo que faz a projecção de uma força do systema sobre um plano perpendicular á *directriz* com uma recta determinada sobre esse plano, isto é, podemos servir-nos de duas *directrizes* unicamente para determinar todas as configurações no espaço.

15. Quando um systema gyrante no espaço tem resultante, vimos (§§ 9,10) como ella gyra sem mudar de grandeza para todas as configurações ; o eixo do binario resultante variará em direcção e grandeza para as diversas con-

figurações, e essas variações dependem, para cada configuração, dos três ângulos que determinão a rotação do systema com uma directriz, e do angulo que indica a rotação sobre essa directriz.

16. No *binario gyrate*, considerão-se duas forças gy-rando em torno dos respectivos centros, e conservando-se constantemente iguaes, parallelas, e contrarias. Chamaremos *braço* a linha de união dos dous centros.

17. É facil perceber desde já, que todas as propriedades que pretendemos investigar acerca da rotação systematica das forças em torno dos pontos d'applicação, suppostos fixos no espaço, dão-nos immediatamente as propriedades, que tem lugar quando o systema de pontos d'applicação, considerado rigido, gyra, ou se desloca de qualquer maneira no espaço, conservando-se invariaveis as direcções absolutas das forças applicadas, e as suas grandezas.



## II.

### *Equivalencia dos grupos gyrautes elementares.*

18. Um systema de forças parallelas gyrautes, que tem uma resultante, equivale a está gy-rando em torno do centro das forças.

19. Se o systema de forças parallelas gyrautes não tem resultante, equivale a um *binario gyrate*, cujas forças são as resultantes dos dous grupos de forças positivas e negativas, applicadas aos respectivos centros. Se estes coincidirem o systema acha-se em equilibrio para todas as configurações.

20. Para que dous binarios gyrautes sejam equivalentes, é necessario em primeiro lugar que os seus eixos sejam parallelos para qualquer configuração; e como os braços dos binarios são sempre perpendiculares aos eixos, segue-se que os ditos braços devem ser parallelos: depois devem ser iguaes os seus momentos para todas as rotações sobre uma directriz eixo qualquer; para isto, basta que essa condicão

se verifique para uma dada direcção do eixo, e para duas rotações sobre elle, que não distem  $180^\circ$ . Com effeito sendo  $P, a, P', a'$  respectivamente as forças e os braços dos binarios, teremos para duas rotações systematicas sobre um dado eixo, chamando  $\varphi, \varphi', \varphi + \alpha, \varphi' + \alpha$  os angulos que respectivamente fazem  $P, a, P', a'$  para as duas configurações

$$aP \text{ Sen } \varphi = a'P' \text{ Sen } \varphi'; \quad aP \text{ Sen } (\varphi + \alpha) = a'P' \text{ Sen } (\varphi' + \alpha),$$

isto é

$$aP \text{ Sen } \varphi \text{ Cos } \alpha + aP \text{ Cos } \varphi \text{ Sen } \alpha = a'P' \text{ Sen } \varphi' \text{ Cos } \alpha + a'P' \text{ Cos } \varphi' \text{ Sen } \alpha \quad \dots \dots \dots (1)$$

donde, se não for  $\alpha = 0$ , ou  $\alpha = 180^\circ$ ,

$$aP \text{ Sen } \varphi = a'P' \text{ Sen } \varphi'; \quad aP \text{ Cos } \varphi = a'P' \text{ Cos } \varphi';$$

e como  $a, P, a', P'$  se devem considerar sempre positivos, conclue-se quadrando as equações precedentes, e sommando os resultados

$$Pa = P'a', \text{ e por conseguinte } \varphi = \varphi'.$$

Se supposermos agora que sobre a mesma directriz eixo se effeitou uma rotação qualquer, designada pela substituição do angulo  $\varphi$  ao angulo  $\alpha$ , a segunda das equações (1) será satisfeita, isto é, haverá equivalencia em todas as configurações correspondentes á mesma direcção do eixo.

Imaginando porém, que os dous systemas binarios gyram sobre os braços, conservar-se-hão constantes os angulos que com elles fazem as forças respectivas; logo os binarios, que erão equivalentes para uma dada posição da directriz eixo, ver-se-ha agora, que satisfazem a essa equivalencia em todas as configurações.

21. Conclue-se pois, que um binario gyrate no espaço póde substituir-se por outro, com tanto que os braços se-jão parallellos, as forças  $P, P'$  parallelas, e no mesmo sentido, e iguaes os momentos maximos  $Pa, P'a'$ .

22. Dous binarios gyrate são sempre equivalentes, quando o são para duas configurações quacsquer, em que se suppõe diversas mas não oppostas direcções do eixo, excluindo porém o caso em que os momentos dos binarios

correspondentes ás duas configurações sejam iguaes, e de signal contrario, ou absolutamente iguaes.

Com effeito a equivalencia nas duas configurações conduz-nos forçosamente ao parallelismo dos braços: por consequente considerando os binarios em uma das configurações equivalentes, e effectuando a rotação das forças sobre os braços até que os eixos venhão a ser parallelos aos eixos da outra configuração, em que tambem se dá a equivalencia, achar-nos-hemos reduzidos ao caso, que discutimos (§ 20), e por consequencia os dous binarios serão equivalentes para todas as configurações.

23. Quando se considerão dous binarios cujas forças gy-rão unicamente no plano, em que estão situados os braços, podem estes deixar de ser parallelos, verificando-se a equivalencia, uma vez que tenhamos  $Pa = P'a'$ , e  $\varphi = \varphi'$ .

===

## PRIMEIRA PARTE.

## CONFIGURAÇÕES EM UM PLANO.

24. Supporemos primeiro todas as forças do systema situadas em um plano, e consideraremos apenas as rotações systematicas, que as não fazem sair delle.

25. Sejam  $P, P',$  etc. as forças dadas;  $x, y, x' y',$  etc. as coordenadas dos seus centros em relação a um systema d'eixos rectangulares  $OX, OY$  situados no plano do systema, e de modo que a *rotação directa* se effeitue de  $OX,$  para  $OY;$  sejam  $\alpha, \alpha'$  etc. os angulos que as forças fazem com o eixo  $OX;$   $M,$  a somma dos momentos das forças em relação ao centro  $O.$  Teremos pois na configuração supposta

$$M = \sum P [x \text{ Sen } \alpha - y \text{ Cos } \alpha] \dots \dots (2).$$

Imaginando agora que a directriz gyrou  $90^\circ$  no sentido directo, será na nova configuração o momento

$$N = \sum P [x \text{ Cos } \alpha + y \text{ Sen } \alpha] \dots \dots (3).$$

E se a rotação da directriz for expressa por um angulo qualquer, teremos

$$M' = \sum P (x \text{ Sen } (\alpha + \iota) - y \text{ Cos } (\alpha + \iota))$$

$$= \Sigma P (x \text{ Sen } \alpha - y \text{ Cos } \alpha) \text{ Cos } \iota + \Sigma P (x \text{ Cos } \alpha + y \text{ Sen } \alpha) \text{ Sen } \iota, \text{ isto é;}$$

$$M' = M \text{ Cos } \iota + N \text{ Sen } \iota \dots \dots (4).$$

26. A equação precedente indica-nos, que será  $M' = 0$ , quando for  $\text{tg } \iota_1 = -\frac{M}{N}$ ; logo é sempre possível achar duas configurações  $\iota_1, \iota_1 + 180^\circ$  para as quaes o momento  $M'$  é nullo. Nestes dous casos se o systema tiver resultante passará esta pela origem.

27. O maximo, e o minimo valor de  $M'$  serão dados pela equação

$$\frac{dM'}{d\iota'} = 0 = -M \text{ Sen } \iota' + N \text{ Cos } \iota', \text{ donde } \text{tg } \iota' = \frac{N}{M} \dots \dots (5)$$

isto é. acharemos para  $\iota'$  dous valores distantes  $180^\circ$ , e será  $\iota' = \iota_1 + 90^\circ$ , ou  $\iota' = \iota_1 + 270^\circ$ , o que nos indica, que as directrizes dos momentos maximo, e minimo existem n'uma recta perpendicular áquella em que existem as directrizes dos momentos nullos.

28. Como se acha

$$\frac{d^2M'}{d\iota'^2} = -M \text{ Cos } \iota' - N \text{ Sen } \iota' = -M'$$

conclue-se que  $M'$  será maximo, ou minimo conforme for positivo, ou negativo.

29. Sendo  $K$  a grandeza absoluta do momento maximo, ou minimo teremos

$$K = M \text{ Cos } \iota' + N \text{ Sen } \iota'$$

$$0 = -M \text{ Sen } \iota' + N \text{ Cos } \iota';$$

sommando os quadrados destas equações obteremos

$$K^2 = M^2 + N^2, \text{ e } K = \pm \sqrt{M^2 + N^2}, \dots \dots (6)$$

correspondendo o signal  $+$  ao momento maximo, e  $-$  ao momento minimo. Estas equações mostram-nos que é sempre constante a somma dos quadrados dos momentos resul-

tantes do systema em duas configurações quaesquer cujas directrizes são perpendiculares entre si.

30. Na equação (4) suppondo  $M$  o momento maximo, será  $N=0$ , e teremos

$$M' = K \text{ Cos } \alpha, \dots\dots\dots(7)$$

que nos indica, que o momento correspondente a qualquer directriz deduz-se do momento maximo, multiplicando-o pelo coseno do angulo que a directriz deste faz com aquell'outra; e por isso serão iguaes os momentos correspondentes a directrizes, que se allastão igualmente para um, e outro lado da directriz maximum.

31. Conhecendo os momentos  $M'$ ,  $M''$  correspondentes a duas directrizes dadas, podemos achar facilmente a grandeza do momento maximo  $K$ , e a posição da sua directriz. Com effeito seja  $\psi$  o angulo que esta faz com a directriz de  $M'$ , e  $\psi + \varphi$ , o angulo que a primeira faz com a directriz de  $M''$ , sendo por tanto  $\varphi$  o angulo das directrizes de  $M'$ , e de  $M''$ , será

$$M' = K \text{ Cos } \psi; \quad M'' = K \text{ Cos } (\psi + \varphi) = K \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \varphi - K \text{ Sen } \psi \text{ Sen } \varphi,$$

ou

$$M' = K \text{ Cos } \psi, \text{ e } M'' = M' \text{ Cos } \varphi - K \text{ Sen } \psi \text{ Sen } \varphi,$$

das quaes concluimos

$$K^2 \text{ Cos}^2 \psi + K^2 \text{ Sen}^2 \psi = K^2 = \frac{M'^2 + M''^2 - 2 M' M'' \text{ Cos } \varphi}{\text{Sen}^2 \varphi}, \text{ e}$$

$$K = \frac{\sqrt{M'^2 + M''^2 - 2 M' M'' \text{ Cos } \varphi}}{\text{Sen } \varphi}.$$

A grandeza de  $\psi$ , será fixada pelas equações

$$\text{Cos } \psi = \frac{M'}{K}; \quad \text{Sen } \psi = \frac{M' \text{ Cos } \varphi - M''}{K \text{ Sen } \varphi}.$$

Se for o angulo  $\varphi = 90^\circ$ , teremos

$$K = \sqrt{M'^2 + M''^2}; \text{Cos } \psi = \frac{M'}{K}; \text{Sen } \psi = -\frac{M''}{K}.$$

32. A grandeza do momento maximo  $K$  pôde exprimir-se independentemente de qualquer systema d'eixos coordenados. Sejam  $r, r'$  etc. as grandezas das rectas tiradas dos centros das forças  $P, P'$  etc. para o centro dos momentos;  $\phi, \phi'$  etc. os angulos contados directa e respectivamente das ultimas linhas para as primeiras, será para uma configuração qualquer

$$M = \Sigma Pr \text{ Sen } \phi;$$

e rotando a directriz  $90^\circ$  no sentido directo

$$N = -\Sigma Pr \text{ Cos } \phi; \text{ logo}$$

$$K^2 = M^2 + N^2 = \Sigma^2 Pr \text{ Sen } \phi + \Sigma^2 Pr \text{ Cos } \phi = \Sigma P^2 r^2 (\text{Sen}^2 \phi + \text{Cos}^2 \phi) + 2 \Sigma Pr P' r' (\text{Cos } \phi \text{ Cos } \phi' + \text{Sen } \phi \text{ Sen } \phi')$$

isto é

$$K^2 = \Sigma P^2 r^2 + 2 \Sigma Pr P' r' \text{ Cos } [\phi - \phi'] \dots \dots \dots (8).$$

Para exprimir as diferenças  $\phi - \phi'$  independentemente de qualquer configuração, consideremos (fig. 1.<sup>a</sup>) duas forças  $P, P'$  cujos centros sejam  $C, C'$ ; seja  $O$  o centro dos momentos, e chamando  $PP', rr'$  os angulos  $PDP', COC'$ , é facil de reconhecer, que teremos sempre  $\phi - \phi' = PP' - rr'$ ; a equação (8) muda-se por tanto em

$$K^2 = \Sigma P^2 r^2 + 2 \Sigma Pr P' r' \text{ Cos } [PP' - rr'] \dots \dots \dots (9)$$

contando-se os angulos  $PP', rr'$  no sentido directo de  $P$  para  $P'$ , e de  $r$  para  $r'$ . A equação (9) é independente de qualquer systema d'eixos coordenados, e de qualquer configuração, visto que para todas ellas são constantes  $PP', rr'$ , etc.;  $K$  será pois em grandeza a resultante de um systema de forças das grandezas  $Pr, P'r'$  etc., e que entre si façam os angulos  $\phi' - \phi, \phi'' - \phi, \text{ etc.}$  ou os angulos  $P'P - rr', P''P - r''r, \text{ etc.}$

33. Se o systema gyrante não tiver resultante é claro, que o momento maximo  $K$ , e a posição da sua directriz em cada configuração, são os mesmos para qualquer situação

do centro dos momentos. Suppondo porém que existe resultante, determinaremos do modo seguinte a grandeza de  $K$ , e a posição da respectiva directriz para qualquer deslocamento do centro  $O$  dos momentos.

Seja  $OR$  uma posição qualquer da directriz supposta paralela á resultante;  $M$  o momento que lhe corresponde para o centro de momentos  $O$  (fig. 2);  $N$  o momento para a directriz  $OR'$  perpendicular a  $OR$ ;  $M'$ ,  $N'$  os momentos correspondentes a essas duas directrizes para o centro de momentos  $O'$ ; faça-se  $ROO' = \omega$ ;  $OO' = d$ , e sendo  $R$  a grandeza da resultante teremos

$$\left. \begin{aligned} M' &= M + Rd \text{ Sen } \omega \\ N' &= N - Rd \text{ Cos } \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

E suppondo que é  $M$  o momento maximo correspondente ao centro  $O$ , as equações precedentes reduzem-se a

$$\left. \begin{aligned} M' &= K + Rd \text{ Sen } \omega \\ N' &= - Rd \text{ Cos } \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

logo chamando  $K'$  o momento maximo correspondente ao centro  $O'$  teremos

$$M'^2 + N'^2 = K'^2 = K^2 + R^2 d^2 + 2 KRd \text{ Sen } \omega \dots\dots (12)$$

equação que nos dá a grandeza do momento maximo relativo ao centro  $O'$ . Para termos a direcção da respectiva directriz, supponhamos que esta faz com a directriz de um momento qualquer  $M'$  relativo ao centro  $O'$  o angulo  $\varphi'$ ; e sendo  $\varphi$  o angulo que a directriz para o momento correspondente  $M$  relativo ao centro  $O$ , faz com a directriz de  $K$ , teremos

$$M' = K' \text{ Cos } \varphi'; N' = - K' \text{ Sen } \varphi'; M = K \text{ Cos } \varphi; N = - K \text{ Sen } \varphi \dots (13)$$

e como as equações (10) dão

$$(M' - M)^2 + (N' - N)^2 = R^2 d^2, \text{ teremos}$$

$$\begin{aligned} & (\text{Cos } \varphi' - K \text{ Cos } \varphi)^2 + (-K' \text{ Sen } \varphi' + K \text{ Sen } \varphi)^2 = R^2 d^2, \text{ ou} \\ & K^2 + K'^2 - 2KK' \text{ Cos } (\varphi' - \varphi) = R^2 d^2. \dots \dots (14). \end{aligned}$$

Se supposermos que  $OR = K$ , e que em direcção representa a directriz de  $K$ ; se perpendicularmente a  $OO'$  tirarmos  $OE = Rd$ , a diagonal  $OF'$  do parallelogramo  $ER$  representará em grandeza o momento maximo  $K'$  relativo a  $O'$ , e será em direcção a sua directriz, o que se demonstra facilmente pelas equações (12) e (14), observando que  $\varphi' - \varphi$  é o angulo das duas directrizes de  $K$ , e  $K'$ , e advertindo que na construcção que fizemos para satisfazer ao valor  $\text{Cos } (\varphi' - \varphi)$  dado pela equação (14), não devemos construir o parallelogramo  $ER$  á direita de  $OR$ , pois que suppondo  $\omega < 90^\circ$ , e  $\varphi = 0$ , teriamos em (11)  $N'$  negativo, e pelo contrario em (13) achar-se-hia  $N'$  positivo.

34. A proposição que acabamos de demonstrar conduzir-nos-ha facilmente a uma notavel propriedade da rotaçào das forças situadas em um plano. Com effeito se quizermos determinar o centro  $O''$  em relação ao qual é  $K' = 0$ , a construcção indicada mostra-nos que devemos á esquerda de  $OR$  levantar  $OO''$  perpendicular á primeira, e fazer  $OO'' \times R = K$ ; porque então tomando  $OE'$  perpendicular a  $OO''$ , e  $OO'' \times R = OR$ , a diagonal do parallelogramo construido sobre  $OR$  e  $OE'$  será nulla. O ponto  $O''$  assim determinado, e escolhido para centro dos momentos, dá momentos nullos para todas as configurações, e por consequente por elle passa constantemente a resultante do systema. Este ponto denominamo-hemos *centro do systema*. Logo um systema de forças situadas n'um plano, e que nelle gyraõ systematicamente, equivale em todas as configurações á sua resultante gyrando em torno do centro do systema.

35. É facil conhecer que o centro do systema é um ponto unico; por quanto para qualquer configuração esse ponto deve existir na recta que representa a resultante do systema; imaginando outra configuração do systema, o ponto d'encontro das duas resultantes será o centro do systema, o qual fica deste modo absolutamente determinado. A propriedade demonstrada do centro do systema representa para as forças divergentes situadas em um plano a generalização da propriedade ha muito conhecida do centro das forças parallelas.

36. Pelo principio demonstrado (§. 30) podemos chegar directamente á propriedade do centro do systema, e á determinação da sua posição no plano das forças dadas. Procuremos o ponto de intersecção das resultantes do systema correspondentes a duas configurações quaesquer. Supponhamos que são  $\psi$ ,  $\psi + \epsilon$  os angulos, que as directrizes dessas configurações fazem com a directriz correspondente ao momento máximo  $K$ ; chamando  $x_1$ ,  $y_1$  as coordenadas orthogonaes do ponto de intersecção das resultantes nas duas configurações;  $a$ ,  $a + \epsilon$  os angulos que ellas fazem com o eixo dos  $x$ , teremos

$$M' = K \text{ Cos } \psi = R (x_1 \text{ Sen } a - y_1 \text{ Cos } a);$$

$$M'' = K \text{ Cos } (\psi + \epsilon) = R (x_1 \text{ Sen } (a + \epsilon) - y_1 \text{ Cos } (a + \epsilon));$$

eliminando successivamente  $y_1$ ,  $x_1$  acharemos

$$\left. \begin{aligned} K (\text{Cos } (\psi + \epsilon) \text{ Cos } a - \text{Cos } \psi \text{ Cos } (a + \epsilon)) &= R x_1 (\text{Sen } (a + \epsilon) \text{ Cos } a - \text{Sen } a \text{ Cos } (a + \epsilon)) \\ K (\text{Cos } (\psi + \epsilon) \text{ Sen } a - \text{Cos } \psi \text{ Sen } (a + \epsilon)) &= R y_1 (\text{Sen } (a + \epsilon) \text{ Cos } a - \text{Sen } a \text{ Cos } (a + \epsilon)) \end{aligned} \right\} (15)$$

mas é

$$\text{Cos } (\psi + \epsilon) \text{ Cos } a - \text{Cos } \psi \text{ Cos } (a + \epsilon) = -\text{Sen } \psi \text{ Cos } a \text{ Sen } \epsilon + \text{Cos } \psi \text{ Sen } a \text{ Sen } \epsilon = \text{Sen } (a - \psi) \text{ Sen } \epsilon;$$

$$\text{Cos } (\psi + \epsilon) \text{ Sen } a - \text{Cos } \psi \text{ Sen } (a + \epsilon) = -\text{Sen } \psi \text{ Sen } a \text{ Sen } \epsilon - \text{Cos } \psi \text{ Cos } a \text{ Sen } \epsilon = -\text{Cos } (a - \psi) \text{ Sen } \epsilon;$$

$$\text{Sen } (a + \epsilon) \text{ Cos } a - \text{Sen } a \text{ Cos } (a + \epsilon) = \text{Sen } (a + \epsilon - a) = \text{Sen } \epsilon;$$

substituindo estes valores nas equações (15), e dividindo por  $\text{Sen } \epsilon$ , obteremos

$$\left. \begin{aligned} K \text{ Sen } (a - \psi) &= x_1 R \\ -K \text{ Cos } (a - \psi) &= y_1 R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16).$$

Como nestas equações não entra o angulo  $\epsilon$ , vê-se que a resultante de qualquer configuração encontra no mesmo ponto  $x_1$ ,  $y_1$  a resultante da configuração  $M'$ : logo as resultantes de todas as configurações passam por esse pon-

10. O angulo  $a - \psi$  é igual ao que a directriz maximuma faz com o eixo dos  $x$ .

37. A existencia, e determinação do systema poder-se-hão tambem deduzir independentemente do principio (§. 30), procedendo da maneira seguinte.

Sendo  $\alpha, \alpha'$  etc. os angulos que as forças  $P, P',$  etc. fazem com o eixo dos  $x$  em uma configuração qualquer;  $a$  o angulo que nessa configuração faz  $R$  com o mesmo eixo; se fizermos rotar  $90^\circ$  a directriz,  $\alpha, \alpha',$  etc.,  $a$  mudar-se-hão em  $\alpha + 90^\circ, \alpha' + 90^\circ,$  etc.,  $a + 90^\circ$ ; e chamando  $x_1, y_1$  as coordenadas do ponto d'encontro das resultantes correspondentes ás duas configurações, teremos

$$\sum P (x \text{ Sen } \alpha - y \text{ Cos } \alpha) = R (x_1 \text{ Sen } a - y_1 \text{ Cos } a);$$

$$\sum P (x \text{ Cos } \alpha + y \text{ Sen } \alpha) = R (x_1 \text{ Cos } a + y_1 \text{ Sen } a);$$

sommando successivamente os productos da primeira equação por  $\text{Sen } a$ , e da segunda por  $\text{Cos } a$ ; depois da primeira por  $-\text{Cos } a$ , e da segunda por  $\text{Sen } a$ , acharemos

$$\sum P (x \text{ Cos } (\alpha - a) + y \text{ Sen } (\alpha - a)) = R x_1;$$

$$\sum P (-x \text{ Sen } (\alpha - a) + y \text{ Cos } (\alpha - a)) = R y_1;$$

e como  $\alpha - a, \alpha' - a,$  etc. são os angulos que cada força faz com a resultante, a partir desta no sentido directo, designando por  $\varphi, \varphi',$  etc. esses angulos, as equações precedentes mudão-se em

$$\left. \begin{aligned} \sum P (x \text{ Cos } \varphi + y \text{ Sen } \varphi) &= R x_1 \\ \sum P (-x \text{ Sen } \varphi + y \text{ Cos } \varphi) &= R y_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

Ora sendo invariaveis os angulos  $\varphi, \varphi',$  etc. para todas as configurações, os primeiros membros destas equações são constantes para quaesquer duas configurações cujas directrizes são perpendiculares: logo as resultantes de todas as configurações passão pelo ponto unico  $x_1, y_1$ .

38. Se as forças forem parallelas será sempre  $\varphi = 0,$

ou  $\varphi = 180^\circ$ , e por conseguinte  $\text{Sen } \varphi = 0$ ;  $\text{Cos } \varphi = \pm 1$ ; neste caso as equações (17) reduzem-se a

$$\Sigma \pm Px = Rx_1; \quad \Sigma \pm Py = Ry_1;$$

formulas que determinão o centro das forças parallelas situadas em um plano.

39. A theoria do centro do systema, e da comparação dos momentos relativos ás diversas configurações podem tambem estabelecer-se geometricamente: é o que passamos a fazer, começando por considerar sómente duas forças situadas em um plano, e que gyrão em torno dos seus centros, conservando sempre a mesma inclinação reciproca. Imaginemos pois as duas forças  $P, P'$  (fig. 3.), que gyrão systematicamente em torno dos pontos  $A, A'$ , conservando-se sempre no mesmo plano: encontrem-se  $P, P'$  em uma configuração qualquer no ponto  $D$ , e seja  $DR$  a direcção da respectiva resultante. Pelos tres pontos  $A, A', D$  faça-se passar uma circumferencia de circulo; o ponto  $D$  conservar-se-ha constantemente sobre essa circumferencia em todas as configurações, visto ser constante o angulo das forças  $P, P'$ . Se for  $C$  o ponto em que  $R$  encontra a circumferencia, será facil de conhecer que esse ponto é immovel para todas as configurações; porquanto devendo  $R$  fazer angulos constantes com as componentes  $P, P'$ , se  $D$  vier a occupar a posição  $D'$ , será  $D'C$  a direcção da respectiva resultante, porque é  $AD'C = ADC$ : logo gyrando systematicamente as forças  $P, P'$  sobre os pontos  $A, A'$ , a resultante gyra simultaneamente sobre o ponto  $C$ .

40. O movimento angular do ponto  $D$  sobre a circumferencia é sempre o dobro da rotação effeituada pela directriz; por isso quando o ponto  $D$  tiver descripto o arco  $DAC$ , a resultante terá a posição  $CR'$  tangente á circumferencia no ponto  $C$ , sendo então  $AC, CA'$  as direcções, e sentidos das forças  $P, P'$ ; quando  $D$  tiver descripto uma circumferencia inteira, isto é, vier a achar-se na posição primitiva  $D$ , a resultante actuará no sentido  $RD$ , sendo então  $AD, A'D$  os sentidos das forças  $P, P'$ . Em geral qualquer posição de  $D$  determina só a direcção, mas não o sentido da resultante.

41. O centro  $C$  de duas forças divergentes  $P, P'$  situa-

das em um plano, determina-se pois pelo encontro de duas rectas  $AC$ ,  $A'C$ , que partem dos centros das forças, fazendo cada una daquellas com a linha d'união desses centros um angulo igual ao que a outra força faz com a resultante, pois é

$$\cdot CAA' = CDA'; CA'A = CDA.$$

42. As rectas  $AC$ ,  $A'C$  estão entre si na razão reciproca das forças  $P$ ,  $P'$ , pois que

$$AC : A'C : : \text{Sen } \frac{CA}{2} : \text{Sen } \frac{CA'}{2} : : P' : P.$$

Este principio dá-nos outro modo de determinar o centro  $C$  das forças  $P$ ,  $P'$  sem dependencia do conhecimento da direcção de  $R$ . Com effeito sobre a linha d'união (fig. 4)  $AA'$  dos centros das forças como corda descreva-se uma circumferencia, cujo segmento  $AF A'$  corresponda a um angulo inscripto igual ao que entre si fazem  $P$ ,  $P'$ ; divida-se  $AA'$  de modo que  $P : P' : : A'E : AE$ ; pelo meio  $F$  do arco  $AA'$ , e por  $E$  tire-se  $FE$ , que encontra em  $C$  a circumferencia; este ponto será o centro das forças, pois que sendo  $ACF = A'CF$ , teremos

$$AC : A'C : : AE : A'E : : P' : P.$$

43. As construcções que temos indicado demonstrão a analogia de posição do centro das forças divergentes com a posição do centro das forças parallelas, e comprehendem, como caso particular, a determinação deste ultimo centro.

44. Se tiverem resultante as forças  $P$ ,  $P'$ , etc. gyrautes e situadas em um plano, poder-se-ha substituir ás duas forças  $P$ ,  $P'$  a sua resultante gyrando em torno do respectivo centro; depois esta e a força  $P''$  equivalem a uma só força gyrando em torno d'um ponto determinado: continuando deste modo substituiremos ao systema dado a sua resultante gyrando em torno d'um ponto fixo, o qual é o centro do systema. Nesta composição successiva se chegar-mos a obter uma resultante  $R$ , igual, parallelas, e contrária á força seguinte do systema  $P^{(n)}$ , faremos a composição

de  $R$ , com outra força, a respeito da qual se não dêem essas circumstancias; e se ellas forem communs a todas as forças restantes, comporemos estas em uma só, que será em grandeza um multiplo de cada uma igual ao numero dellas, e cujo centro é o centro das forças parallelas, que se compozerão: esta resultante compor-se-ha finalmente com  $R$ .

45. A existencia e posição do centro de um systema de forças gyrautes situadas em um plano podem tambem deduzir-se da seguinte maneira.

Decomponhão-se as forças dadas em relação a dous eixos rectangulares, ou obliquos, e supponhamos primeiro que a resultante do systema na configuração, em que se fez essa decomposição, não é parallela a nenhum dos eixos; as forças dadas  $P, P', P''$  etc. equivalem pois ás forças gyrautes  $X, Y, X', Y', X'', Y''$ , etc.; ás forças  $X, X'$ , etc. substitua-se a sua resultante  $X_i$  gyrando em torno do centro dessas forças parallelas, e ás forças  $Y, Y'$ , etc. substitua-se a sua resultante  $Y_i$  gyrando em torno do respectivo centro: o systema dado fica pois substituido por duas forças gyrautes  $X_i, Y_i$  que entre si fazem um angulo igual ao dos eixos, que se adoptarão. Pelas construcções indicadas (§§. 41, 42), substituiremos  $X_i, Y_i$  por uma só força gyrando sobre o respectivo centro. Se a resultante do systema na configuração em que se fez a decomposição das forças dadas fosse parallela a um dos eixos coordenados, isto é, se por exemplo fosse  $X_i = 0$ , o systema reduzia-se em geral á força gyraute  $Y_i$ , e a um binario gyraute  $X_i, -X_i$ , cujas forças serão as resultantes dos dous grupos de componentes positivas, e negativas das forças  $P, P'$  etc. em relação ao eixo dos  $x$ , tendo essas resultantes por centros os dos respectivos grupos. O binario gyraute poderia deslocar-se no seu plano até que um dos centros das suas forças coincidisse com o centro de  $Y_i$ ; as forças applicadas a este ponto reduzir-se-hião a uma só, e por conseguinte o systema dado equivaleria a duas forças gyrautes não parallelas, como no caso precedente, isto é, a uma só força gyraute.

Se fossem simultaneamente  $X_i = 0, Y_i = 0$ , o systema dado não teria resultante, mas reduzir-se-hia a dous binarios gyrautes. Transformando-os em outros dous binarios gyrautes de braços iguaes, deslocando um delles até coin-

cidirem os dous braços, e compondo as forças applicadas ao braço commum, teriamos o systema dado reduzido a um só binario gyrante.

46. Demonstrado que qualquer systema de forças gyrantes em um plano, e que é dotado de resultante, equivale a uma só força que gyra no centro do systema, é mui facil deduzir todos os principios, que precedentemente tinhamos estabelecido por meio da analyse.

Com effeito equivalendo o systema dado a uma força  $R$  gyrando em torno do centro  $C$ , (fig. 5), se tomarmos  $O$  para centro dos momentos, e fizermos  $OC=r$ ,  $OCR=\omega$ , será para qualquer configuração o momento respectivo

$$M = Rr \text{ Sen } \omega \dots \dots \dots (18)$$

$M$  será zero para as duas configurações  $\omega=0$ ,  $\omega=180^\circ$ , em que a resultante passa pelo centro dos momentos; será maximo para  $\omega=90^\circ$ , ou  $R$  perpendicular á linha d'união dos dous centros, e produzindo uma rotação directa; e finalmente será minimo para  $\omega=270^\circ$ , caso em que o momento é negativo; e teremos chamando  $\pm K$  o momento maximo, ou minimo

$$\pm K = \pm Rr,$$

isto é, o momento maximo igual á resultante do systema multiplicada pela distancia do centro deste ao centro dos momentos. Os momentos serão sempre nullos quando esses dous centros coincidirem.

47. Se a directriz correspondente a  $M$  gyra no sentido directo  $90^\circ$ , teremos o momento para a nova configuração

$$N = Rr \text{ Sen } (\omega - 90^\circ) = -K \text{ Cos } \omega \dots \dots \dots (19).$$

Das equações (18), e (19) deduz-se

$$M^2 + N^2 = K^2.$$

48. Se chamarmos  $\phi$  o angulo que a directriz de  $M$  faz com a directriz de  $K$ , em vez da equação

$$M = K \text{ Sen } \omega,$$

podemos empregar

$$M = K \text{ Cos } \varphi,$$

que nos dá um momento qualquer expresso pelo momento maximo, e pelo angulo das directrizes correspondentes a esses dous momentos.

Vê-se pois que se para duas directrizes, que não forem contrarias directamente, tivermos  $M = 0$ , será  $K = 0$ , isto é, o centro dos momentos será o centro das forças.

49. Um systema de forças gyranes situadas em um plano, e que tem resultante, pôde converter-se por uma infinidade de modos differentes em outro systema equivalente de duas forças gyranes nesse plano. Com effeito equivalendo o systema dado a uma força  $R$  gyrando em torno de um centro, cujas coordenadas rectangulares seião  $x', y'$ , e querendo substituil-o por duas forças gyranes  $P, P'$  applicadas nos pontos  $x, y, x', y'$ , se chamarmos  $\varphi, \varphi'$  os angulos que  $R$  faz com essas forças, teremos que as equações (17), e as que indicão que  $R$  é resultante, são neste caso

$$P (x \text{ Cos } \varphi + y \text{ Sen } \varphi) + P' (x' \text{ Cos } \varphi' + y' \text{ Sen } \varphi') = Rx,$$

$$P (-x \text{ Sen } \varphi + y \text{ Cos } \varphi) + P' (-x' \text{ Sen } \varphi' + y' \text{ Cos } \varphi') = Ry,$$

$$P \text{ Cos } \varphi + P' \text{ Cos } \varphi' = R;$$

$$P \text{ Sen } \varphi + P' \text{ Sen } \varphi' = 0:$$

logo das oito quantidades  $P, P', \varphi, \varphi', x, y, x', y'$  quatro podem ser tomadas arbitrariamente. Em geral um systema de forças gyrando em um plano pôde ser substituido por outro systema gyranes de  $n$  forças, sendo arbitrarías 4  $(n - 1)$  das 4  $n$  quantidades, que definem este ultimo.

50. Se o systema gyranes dado não tem resultante, as forças dadas, menos uma, equivalem a uma força gyrando em torno do seu centro, a qual será igual em grandeza, e contraria em sentido áquella força separada. O sys-

tema equivale pois a um binario gyrante, o qual póde ser transformado no seu plano, ou n'outro paralelo, como dissemos (§ 23). Neste caso qualquer que seja o ponto que se toma para centro dos momentos, chamando  $R$  cada uma das forças do binario resultante,  $r$  o braço respectivo,  $\omega$  o angulo que essas duas linhas fazem entre si para uma dada configuração, será o momento correspondente

$$M = Rr \text{ Sen } \omega.$$

Os momentos maximo, e minimo terão logar quando  $R$ ,  $r$  forem perpendiculares, sendo no primeiro caso  $M$  positivo, e no segundo negativo.  $M$  será nullo para as duas configurações, em que as forças  $R$  se achão na direcção do braço  $r$ : nessas configurações dá-se o equilibrio do systema.

51. Designando por  $K$  o momento maximo, e por  $\varphi$  o angulo que a sua directriz faz com a directriz relativa ao movimento  $M$ , deduziremos tambem da equação precedente

$$M = K \text{ Cos } \varphi.$$

Esta equação dá semelhantemente os momentos maximo, e minimo para  $\varphi = 0$ , e  $\varphi = 180^\circ$ , e as duas configurações em que se verifica o equilibrio para  $\varphi = 90^\circ$ , e  $\varphi = 270^\circ$ .

52. Concluiremos tambem que se em um systema de forças gyrantes em um plano, sendo nulla a resultante, houver duas configurações não oppostas, nas quaes se dê o equilibrio, isto é, seja  $M = 0$ , haverá equilibrio em todas as configurações.

53. Do que temos dito ultimamente, e do que se estabeleceo (§§ 2,20), se conhece geralmente que dous systemas de forças gyrantes em um plano, que tem, ou deixão de ter resultante, serão sempre equivalentes, se o forem em duas configurações não oppostas.

54. Quando for dado um systema qualquer de forças gyrantes situadas em um plano, poderemos fazer a sua redução pelo seguinte processo.

Cada força dada equivale a essa força gyrando no centro dos momentos, e a um binario gyrante cujas forças são a força dada, e outra igual e contraria áquella, que applicamos ao centro dos momentos: o systema dado equivale pois

á sua resultante gyrando no centro dos momentos, e ao conjuncto dos binarios gyrantes, que indicámos.

Tomemos um destes  $POCP$  (fig. 6); adoptando um systema qualquer d'eixos  $OX$ ,  $OY$  situados no plano das rotações, tiremos pelo centro  $C$  uma recta qualquer que encontre os eixos nos pontos  $A$ ,  $A'$ ;  $P$  gyrando em  $C$  póde ser substituida por duas forças parallelas  $p$ ,  $p'$  cujos centros serão  $A$ ,  $A'$ ; logo o binario  $POCP$  substitue-se por dous outros cujos braços  $OA$ ,  $OA'$  coincidem com os eixos, e cujas forças são parallelas a  $P$ . Faremos uma decomposição analogá para os outros binarios; depois transformando todos os binarios que tem os braços sobre  $OX$ , em outros que tenham braços iguaes a  $OA$ , todas as forças destes binarios applicadas em  $A$ , e  $O$  equivalem a duas forças iguaes, parallelas, e contrarias gyrando nesses pontos, isto é, teremos um só binario com o braço  $OA$ : reduziremos igualmente os binarios, cujos braços existem sobre  $OY$ , a um só binario, cujo braço seja  $OA'$ ; as duas resultantes  $Q$ ,  $Q'$  applicadas a  $A$ ,  $A'$  equivalem a uma só força  $R'$  gyrando no centro  $E$  d'aquell'outras; e do mesmo modo teremos em  $O$  uma força igual, parallelá, e contraria a  $R'$ ; por conseguinte o systema dado equivale á sua resultante  $R$  applicada no centro dos momentos, e ao binario gyrate  $R', OE$ .

55. Se o systema dado devesse gyrate de qualquer modo no espaço, erã licitas todas as transformações que indicámos, á excepção da ultima reducção dos dous binarios  $(Q, OA)$ ,  $(Q', OA')$ , pois que não seria licito substituil-os pelo binario  $(R', OE)$ : nesse caso tomando para directrices os dous eixos  $OX$ ,  $OY$ , e outro perpendicular ao seu plano, quando o plano  $X'OY'$  movel tivesse uma inclinação qualquer em relação ao plano fixo  $XOY$ , as forças  $Q$ ,  $Q'$ , e as suas contrarias applicadas em  $O$  conservar-se-hião parallelas ao plano movel  $X'OY'$ ; mas as forças  $Q$ ,  $Q'$  apenas existirião em um só plano, quando  $X'OY'$  fosse paralleló á recta  $AA'$ ; logo sómente nas configurações correspondentes a cada uma dessas posições do plano directriz haveria centro para as ditas forças, e esse centro deixaria de existir em  $XOY$ , sempre que este plano não coincidissem com  $X'OY'$ .

---

  
**SEGUNDA PARTE.**

---

  
**CONFIGURAÇÕES NO ESPAÇO.**

---

  
**I.***Reducção e transformação dos systemas gyran-  
tes no espaço.*

---

56. Consideremos um systema de binarios gyran-tes no espaço cujos braços sejam parallellos a um plano dado, e cujas forças sejam parallellos a outro; durante a rotação systematica suppon-do fixo o primeiro plano, movel e directriz o segundo, os bra-ços, e as forças conservão-se parallellos aos mesmos planos, e quando estes se tornarem parallellos, os braços, e as forças serão parallellos a um só plano. Tomaremos pois esta situa-ção do systema, para mais facilmente effectuar a redução dos binarios dados. Transportem-se parallelamente todos el-les a esse plano unico, que é o plano parallello aos braços; os extremos destes podem unir-se no centro dos momentos,

e fazendo passar por este dous eixos quaesquer, podemos reduzir, (§ 55), os binarios propostos a dous binarios, que tenham os braços situados sobre os eixos adoptados, podendo acontecer que um destes binarios resultantes se aniquile, ou ambos elles: neste ultimo caso o systema dado equilibra-se em todas as configurações.

57. Assim como fizemos a redução tomando arbitrariamente a direcção dos braços dos binarios resultantes, podemos tambem adoptar arbitrariamente as direcções das forças nos binarios resultantes. Para isso tracem-se no plano de redução dous eixos quaesquer nas direcções, que se pretende dar ás forças dos binarios resultantes; cada força dos binarios dados decompõe-se em duas  $X$ ,  $Y$  parallelas aos eixos adoptados, e deverá ser

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Separem-se entre as forças  $X$ ,  $X'$ ,  $X''$ , etc. as que são positivas, e as negativas; sejam as sommas de cada um dos grupos  $X_i$ ,  $-X_i$ ; todas as forças parallelas ao eixo dos  $x$  equivalem por tanto a um binario cujas forças são  $X_i$ ,  $-X_i$  applicadas respectivamente aos centros dos dous grupos de forças parallelas; semelhantemente as forças  $Y$ ,  $Y'$ ,  $Y''$  etc. equivalem ao binario  $Y_i$ ,  $-Y_i$ , cujos centros são os dos dous grupos correspondentes de forças parallelas; e temos assim resolvido o problema da maneira indicada.

58. Se um systema de binarios gyrautes se reduzir a dous, ou mais binarios gyrautes, cujos braços sejam parallellos, poderão esses finalmente ser reduzidos a um só binario, cujo braço será tambem paralelo aquell'outros; porque tomando dous quaesquer binarios de braços parallellos, podemos transportal-os de modo que os braços coincidão em direcção; depois transformar um delles, ou ambos de maneira que os braços coincidão tambem em grandeza; e ultimamente compor as forças applicadas nos extremos do braço commum. Se os binarios de braços parallellos tem as forças parallelas a um plano commum, o binario resultante terá as forças parallelas ao mesmo plano.

59. Um systema de binarios gyrautes, cujos braços tenham direcções quaesquer, mas cujas forças sejam todas parallelas, reduz-se a um só binario gyraute; para o que não temos mais que separar em dous grupos as forças positivas,

e negativas do systema, e substituir cada grupo pela sua resultante gyrando no respectivo centro.

60. Um systema de binarios gyrantes, cujos braços se-  
 ão, parallelos a um plano dado, e cujas forças tenham uma  
 direcção qualquer no espaço, reduz-se em geral a dous bi-  
 narios gyrantes, cujos braços coincidem com dous eixos  
 quaesquer  $OX$ ,  $OY$  situados em um plano parallelo aos bra-  
 ços dos binarios dados (§ 56). As forças destes binarios po-  
 derão deixar de ser parallelas ao plano  $XOY$ .

61. Um systema de binarios gyrantes, cujas forças sejam  
 parallelas a um plano, e cujos braços tenham direcções quaes-  
 quer no espaço, reduz-se em geral a dous binarios gyrantes,  
 cujas forças são parallelas a dous eixos quaesquer  $OX$ ,  $OY$   
 situados naquella plano; para o que basta imitar o processo  
 indicado (§ 57). Os braços dos binarios resultantes poderão  
 deixar de ser parallelos ao plano  $XOY$ .

62. Dous binarios gyrantes situados em um plano, ou  
 em planos diferentes, e cujos braços não sejam parallelos,  
 não podem transformar-se em outros dous, que tendo os  
 braços parallelos ás direcções primitivas, tenham as forças  
 em direcções diferentes das primitivas.

Transportem-se os braços dos dous grupos a um plano,  
 e fação-se coincidir os braços parallelos; depois transfor-  
 mem-se os binarios de modo, que tenham braços iguaes aquel-  
 les que os tem coincidentes, e supponhamos que então um  
 unico ponto é extremo commum dos braços. Em virtude  
 destas transformações um dos grupos terá as forças  $X$ ,  $X'$   
 applicadas em  $A$ ,  $A'$  (fig. 7), e as oppostas em  $O$ , e o outro  
 grupo as forças  $Y$ ,  $Y'$ , e as correspondentes oppostas em  $O$ .  
 Decomponha-se  $Y$  em duas forças uma das quaes seja igual  
 a  $X$ , e coincidente com ella; decomponha-se semelhantemen-  
 te  $Y'$  em relação a  $X'$ , e faça-se tambem uma decomposi-  
 ção analoga para as forças applicadas em  $O$ ; o systema  
 $(OA, Y)$ ,  $(OA', Y')$  equivalerá ao systema  $(OA, X)$ ,  
 $(OA', X')$ , e mais dous binarios cujos braços são tambem  
 $OA$ ,  $OA'$ ; logo estes ultimos devem sempre equilibrar-se,  
 e por tanto tomando as forças de um delles em sentido con-  
 trario, teremos dous binarios equivalentes, cujos braços são  
 $OA$ ,  $OA'$ ; mas sendo isto impossivel, (§ 21), segue-se que  
 cada um desses binarios deve aniquilar-se de per si, isto é,  
 serão nullas as componentes que suppozemos terem  $Y$ ,  $Y'$   
 em sentidos differentes de  $X$ ,  $X'$ : logo  $Y$ ,  $Y'$  não podem

ser diferentes em direcção de  $X$ , e  $X'$ , e o mesmo acontecerá ás forças dos binarios primitivos, as quaes são respectivamente parallelas a  $X$ ,  $X'$ ,  $Y$ ,  $Y'$ .

63. Dous binarios gyranes situados em planos parallellos, ou não parallellos, e em que nem os braços, nem as forças são parallelas, não podem equivaler a outros dous binarios, cujas forças sejam respectivamente parallelas ás dos primeiros, e cujos braços tenham direcções diversas das do primeiro grupo.

Transportem-se e reúnam-se os dous grupos como indica a (fig. 8), em que  $AX$ ,  $A'X'$ , e as suas oppostas applicadas em  $O$  são as forças de um dos grupos, e  $BY$ ,  $B'Y'$ , e as suas oppostas applicadas em  $O$  as forças do outro grupo; por hypothese é  $Y$  parallela a  $X$ , e  $Y'$  a  $X'$ . Se  $Y$  for em grandeza differente de  $X$ , póde o binario  $(OB, Y)$  transformar-se, conservando a mesma direcção do braço, e da força, de modo que tenhamos  $X=Y$ : supponhamos que tambem se fez  $X'=Y'$ : tomando pois em sentido contrario  $Y$ ,  $Y'$ , e as suas oppostas, teremos quatro binarios que se equilibrão; mas as forças applicadas em  $O$  visivelmente se equilibrão para todas as configurações; logo deverão tambem equilibrar-se os binarios  $(X, AB)$ ,  $(X', A'B')$ ; mas este equilibrio é impossivel, porque tomando em sentido contrario as forças de um dos binarios, teriamos dous binarios gyranes equivalentes, sem serem parallelas todas as forças: logo deverão coincidir em direcção  $OA$ , e  $OB$ ,  $OA'$ , e  $OB'$ .

64. Dous binarios gyranes cujas forças, e cujos braços não são parallellos, não podem reduzir-se nunca a um só binario gyranes.

Sejam  $OA$ ,  $OA'$  (fig. 9) os braços dos binarios dados;  $X$ ,  $X'$ , e as suas oppostas applicadas em  $O$  as forças correspondentes;  $(OB, Y)$  o binario equivalente áquelles dous, e cujo braço suppremos primeiro não coincidir nem com  $OA$ , nem com  $OA'$ . Por  $B$  tire-se uma recta qualquer  $CBC'$  que encontra em  $C$ ,  $C'$  as direcções  $OA$ ,  $OA'$ ; decomponha-se  $Y$  em duas forças  $Y'$ ,  $Y''$ , cujos centros sejam  $C$ ,  $C'$ , e imaginando a força  $-Y$  applicada em  $O$  decomposta semelhantemente, teriamos os binarios  $(OA, X)$ ,  $(OA', X')$  equivalentes aos binarios  $(OC, Y')$ ,  $(OC', Y'')$ , o que é impossivel, (§ 62), não sendo  $X$ ,  $X'$  parallelas a  $Y$ : logo o binario  $(OB, Y)$  não póde equivaler aos outros dous bi-

narios dados. Se porêem  $OB$  coincidissem com  $OA$ , tomando em sentido contrario as forças  $Y$ , haveria equilibrio entre esse binario, e os dous binarios dados; mas os dous que tem o braço commum  $OA$  reduzem-se a um só; logo haveria equilibrio entre dous binarios, cujos braços são  $OA$ ,  $OA'$ , o que é impossivel.

65. Se dous binarios gyrautes cujos braços, e cujas forças não sejam parallelas, equivalerem a outros dous binarios cujos braços, e cujas forças sejam respectivamente parallelas aos do primeiro grupo, serão iguaes os productos de cada um de dous braços parallelos multiplicado por uma das forças correspondentes.

Porque transportando os binarios de maneira que coincidão em direcção os braços parallelos; depois transformando-os de modo que esses braços coincidão tambem em grandeza; sendo  $A$ ,  $A'$  os braços communs;  $X$ ,  $X'$  as forças correspondentes a um grupo;  $Y$ ,  $Y'$  as correspondentes ao outro; se não forem  $X=Y$ ,  $X'=Y'$ , decomporemos  $Y$ ,  $Y'$  em forças respectivamente parallelas, no mesmo sentido, e iguaes a  $X$ ,  $X'$ , e em outras  $Y-X$ ,  $Y'-X'$ , e deverão equilibrar-se os binarios  $(A, Y-X)$ ,  $(A', Y'-X')$ , o que sendo impossivel, por não serem parallelos  $A$ ,  $A'$ , segue-se que  $X=Y$ ,  $X'=Y'$ , e  $AX=AY$ ,  $A'X'=A'Y'$ ; e como para transformar o binario  $(a, P, \phi)$  em outro equivalente  $(a', P', \phi')$ , (§ 21), se deve ter  $aP = a'P'$ , além das outras condições indicadas, segue-se que nos binarios propostos erão iguaes os productos de cada um de dous braços parallelos multiplicado pela força correspondente.

66. Os principios consignados nos §§ precedentes reduzem-se a que, se tivermos dous binarios  $(a, P)$ ,  $(a', P')$  de braços, e forças não parallelas, não podemos fazer a transformação em outro systema  $(b, Q)$ ,  $(b', Q')$ , deixando de verificar-se apenas uma só das duas condições complexas

$$a, b, \text{ e } a', b' \text{ parallelos;}$$

$$P, Q, \text{ e } P', Q', \text{ parallelas;}$$

da verificação de uma dellas conclue-se a outra, e ter-se-ha tambem

$$aP = bQ, \text{ e } a'P' = b'Q',$$

advertindo sempre que as forças paralelas  $P$ ,  $Q$ , e  $P'$ ,  $Q'$  devem ter um sentido symetrico em relação aos extremos correspondentes dos braços paralelos.

67. Se um grupo de dous binarios gyrantes de braços, e forças não paralelas, equivaler a outro grupo de dous binarios, os dous planos que respectivamente forem parallellos aos dous braços, e ás forças do primeiro grupo, serão tambem respectivamente parallellos aos braços, e ás forças do segundo grupo.

Em primeiro logar é forçoso que no segundo grupo nem os braços, nem as forças dos binarios sejão parallelas, aliás esse grupo reduzir-se-hia a um só binario gyrante equivalente ao primeiro grupo, o que é inadmissivel (§ 64).

Supponhamos pois que os braços de cada um dos dous grupos se rennirão por quaesquer dos extremos; imagine-se que se passou para uma configuração em que as forças do primeiro grupo existem no plano dos seus braços; neste plano tomem-se dous eixos quaesquer directrizes  $OX$ ,  $OY$ , e perpendicularmente a elles outro eixo directriz  $OZ$ . Façãose rotar os dous grupos de binarios sobre  $OZ$ , até se chegar a uma configuração, em que haja equilibrio no primeiro grupo, o mesmo acontecerá no segundo. Ora quando dous binarios de forças, e braços não parallellos estão em equilibrio, é forçoso que o plano parallello ás direcções das forças seja parallello ao plano das direcções dos braços, porque do contrario, os dous eixos dos binarios farião entre si um angulo differente de  $0^\circ$ , ou  $180^\circ$ : logo na configuração que considerámos as forças do segundo grupo existem no plano dos seus braços: se, partindo dessa configuração, fizermos rotar os dous grupos  $180^\circ$  sobre  $OZ$ , haverá de novo equilibrio no primeiro grupo, e por consequente no segundo, e as forças deste achar-se-hão tambem situadas no plano dos respectivos braços. Logo se tomarmos um plano directriz parallello ás forças do segundo grupo, este plano nas duas configurações terá a mesma direcção no espaço; mas pela geometria é facil de ver, que essa circumstancia sómente se verificará em dous casos, ou quando o plano for perpendicular, ou parallello ao eixo dos  $Z$ . A ultima hypothese é inadmissivel, poisque como as forças do segundo grupo devem ser opostas nas duas configurações que considerámos, (§ 26), a geometria elementar nos indica tambem, que ellas serão parallelas ao plano  $XOY$ , e por consequente parallelas entre

si, o que não é verdade. Logo só podemos adoptar a hypothese de que o plano directriz subsidiario é perpendicular a  $OZ$ , isto é, paralelo ao plano dos braços, e forças do primeiro grupo; e como nas duas configurações, que tivemos em vista, também os braços do segundo grupo erão parallelos a esse plano subsidiario, terão logar em todas as configurações as condições de equivalencia, que pretendiamos demonstrar.

68. Reconhecido que para haver equivalencia entre dous grupos de dous binarios gyranes irreduziveis, é forçoso que os braços dos dous grupos sejam parallelos a um plano, e todas as forças parallelas a outro plano, segue-se que todas as transformações que se podem fazer n'um grupo de dous binarios irreduziveis, são as que resultão de todas as direcções que se podem dar ás respectivas forças parallelamente a dous eixos  $OX$ ,  $OY$  situados no ultimo plano, e moveis nelle para as diversas transformações, pois que fixada a direcção desses eixos, ficão também fixadas as direcções dos braços, e os momentos maximos (§ 66).

Para indagarmos pois todas as condições, que devem regular esta transformação, e para generalizar um tanto mais essa indagação, supponhamos que os dous binarios dados equivalem a um systema qualquer de binarios, cujos braços sejam todos parallelos a um plano, e as forças parallelas a outro plano. Tome-se este ultimo por directriz, e passe-se para nma configuração em que os dous planos sejam parallelos. Nesta configuração transportem-se todos os binarios para o plano directriz, no qual tracemos dous eixos rectangulares  $OX$ ,  $OY$  (fig. 10), e decomponhamos as forças dadas parallelamente a esses eixos; teremos que o systema dado equivale a dous binarios gyranes de forças respectivamente parallelas aos eixos. Supporemos sempre que nestas transformações as forças negativas de cada binario se achão applicadas na origem  $O$ . Se os eixos gyrarem em torno da origem, e suppondo que para cada una das suas posições se fez nova decomposição das forças dadas parallelamente a essas direcções dos eixos, os braços  $Om$ ,  $Om'$  gyrarão também continuamente, visto que não é possível, (§ 66), que para diversas posições dos eixos  $OX$ ,  $OY$ , isto é, diversas direcções das forças  $X$ ,  $Y$ , as direcções  $Om$ ,  $Om'$  não mudem.

Se os eixos  $OX$ ,  $OY$  rotarem directamente  $90^\circ$  (fig. 10

bis), a decomposição das forças parallelamente aos eixos dá componentes totaes respectivamente iguaes, e parallelas ás da (fig. 10); os centros de cada grupo de forças parallelas não mudão; o que mudou unicamente é a denominação das forças  $X_i, Y_i$ , e a dos braços respectivos; vê-se pois que rotando os eixos directamente  $90^\circ$ ,  $Om, Om'$  rotarão tambem directamente,  $Om$  (fig. 10) a quantidade angular  $mOm'$ , e  $Om'$  o angulo  $180^\circ - mOm'$ .

Vêr-se-ha semelhantemente que rotando os eixos directamente  $180^\circ$ , cada um dos braços  $Om, Om'$  descreve tambem directamente um angulo de  $180^\circ$ : logo os eixos, e os braços completão simultaneamente uma revolução de  $360^\circ$  no sentido directo. Nas figuras 10, e 10 bis supposemos que se passa de  $Om$  para  $Om'$  por meio de uma rotação directa  $< 180^\circ$ ; se porém acontecer o contrario, então uma rotação directa nos eixos moveis  $OX, OY$  produzirá uma rotação inversa nos braços  $Om, Om'$ , o que se reconhecerá por um modo analogo ao que empregámos na outra hypothese. A's duas especies de systemas de dous binarios, que temos considerado, chamaremos pela sua ordem systema directo, e systema inverso. De um delles passa-se para o outro fazendo rotar o systema directriz  $OXYZ$  de modo que  $OZ$  tome uma posição opposta á primitiva.

69. Isto supposto inaginemos duas posições dos eixos rectangulares  $OX, OY, OX', OY'$ , ás quaes correspondem os braços  $Om, Om', Om, Om'$ , e as forças respectivas  $X_i,$

$Y_i, X_i, Y_i$  (fig. 11). Designando os braços  $Om, Om', Om,$

$Om'$  por  $m, m', m, m'$ ; os angulos, que elles fórmão com os

eixos por  $mX, mY, m'X, m'Y$  etc.; sendo  $X, Y, X', Y', X'', Y''$ , etc. as componentes das forças do systema em relação aos eixos  $OX, OY$ ;  $x, y, x', y'$ , etc. as coordenadas dos centros respectivos;  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{X}', \dot{Y}', \dot{X}'', \dot{Y}''$ ,

etc. as componentes em relação ao systema  $X'OY'$ ;  $\dot{x}, \dot{y}$ ,

$\dot{x}', \dot{y}'$ , etc. as coordenadas respectivas; é facil de reconhecer,

que a grandeza dos momentos maximos  $mX_i = A_i,$   $m'Y_i = B_i,$   $mX_i = A_i,$   $m'Y_i = B_i$ , e os angulos que os bra-

ços  $m$ ,  $m'$ ,  $m$ ,  $m'$  fazem com os dous eixos  $OX$ ,  $OX'$  são dados, no systema directo, ou no inverso, pelas formulas

$$A_1 = \sqrt{\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX}; B_1 = \sqrt{\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY} \dots \dots \dots (20)$$

$$\text{Cos } mX = \Sigma xX : \sqrt{\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX}; \text{ Sen } mX = \Sigma yX : \sqrt{\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX} \dots (21)$$

$$\text{Cos } m'X = \Sigma xY : \sqrt{\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY}; \text{ Sen } m'X = \Sigma yY : \sqrt{\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY} \dots (22)$$

$$A' = \sqrt{\Sigma^2 \dot{x}X + \Sigma^2 \dot{y}X}; B' = \sqrt{\Sigma^2 \dot{x}Y + \Sigma^2 \dot{y}Y} \dots \dots \dots (23)$$

$$\text{Cos } mX' = \Sigma x\dot{X} : \sqrt{\Sigma^2 x\dot{X} + \Sigma^2 y\dot{X}}; \text{ Sen } mX' = \Sigma y\dot{X} : \sqrt{\Sigma^2 x\dot{X} + \Sigma^2 y\dot{X}} \dots (24)$$

$$\text{Cos } m'X' = \Sigma x\dot{Y} : \sqrt{\Sigma^2 x\dot{Y} + \Sigma^2 y\dot{Y}}; \text{ Sen } m'X' = \Sigma y\dot{Y} : \sqrt{\Sigma^2 x\dot{Y} + \Sigma^2 y\dot{Y}} \dots (25)$$

O systema directo distinguir-se-ha analyticamente do inverso conforme for positivo, ou negativo  $\text{Sen}(m'X - mX) = (\Sigma yY \Sigma xX - \Sigma xY \Sigma yX) : A_1 B_1$ , isto é, conforme tivermos  $\Sigma yY \Sigma xX - \Sigma xY \Sigma yX \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ : consideraremos posteriormente o caso em que esta funcção se aniquila.

70. Chamemos  $a$  o angulo contado no sentido directo de  $OX$  até  $OX'$ , teremos em qualquer desses dous systemas

$$\text{Cos } mX = \text{Cos}(mX' + a) = \text{Cos } a \text{ Cos } mX' - \text{Sen } a \text{ Sen } mX';$$

$$\text{Cos } m'X = \text{Cos}(m'X' + a) = \text{Cos } a \text{ Cos } m'X' - \text{Sen } a \text{ Sen } m'X';$$

donde e das formulas (23, 24, 25) concluiremos

$$A' \text{ Cos } mX = \text{Cos } a \Sigma x\dot{X} - \text{Sen } a \Sigma y\dot{X} \dots \dots (26)$$

$$B' \text{ Cos } m'X = \text{Cos } a \Sigma x\dot{Y} - \text{Sen } a \Sigma y\dot{Y} \dots \dots (27)$$

Ora pelas formulas de transformação de coordenadas, e das forças em relação a diversos systemas d'eixos rectangulares é

$$\dot{x} = x \operatorname{Cos} a + y \operatorname{Sen} a; \quad \dot{X} = X \operatorname{Cos} a + Y \operatorname{Sen} a;$$

$$\dot{y} = -x \operatorname{Sen} a + y \operatorname{Cos} a; \quad \dot{Y} = -X \operatorname{Sen} a + Y \operatorname{Cos} a;$$

logo

$$\Sigma x \dot{X} = \operatorname{Cos}^2 a \Sigma x X + \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma y X + \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma x Y + \operatorname{Sen}^2 a \Sigma y Y \dots (28)$$

$$\Sigma y \dot{X} = -\operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma x X + \operatorname{Cos}^2 a \Sigma y X - \operatorname{Sen}^2 a \Sigma x Y + \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma y Y \dots (29)$$

$$\Sigma x \dot{Y} = -\operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma x X - \operatorname{Sen}^2 a \Sigma y X + \operatorname{Cos}^2 a \Sigma x Y + \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma y Y \dots (30)$$

$$\Sigma y \dot{Y} = \operatorname{Sen}^2 a \Sigma x X - \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma y X - \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} a \Sigma x Y + \operatorname{Cos}^2 a \Sigma y Y \dots (31)$$

substituindo estes valores nas equações (26, 27), e feitas as devidas reduções, acharêmos

$$A' \operatorname{Cos} mX = \operatorname{Cos} a \Sigma x X + \operatorname{Sen} a \Sigma x Y \dots (32)$$

$$B' \operatorname{Cos} m'X = -\operatorname{Sen} a \Sigma x X + \operatorname{Cos} a \Sigma x Y \dots (33)$$

Semelhantemente obteremos

$$A' \operatorname{Sen} mX = A' \operatorname{Sen} (mX' + a) = \operatorname{Cos} a \Sigma y \dot{X} + \operatorname{Sen} a \Sigma x \dot{X} \dots (34)$$

$$B' \operatorname{Sen} m'X = B' \operatorname{Sen} (m'X' + a) = \operatorname{Cos} a \Sigma y \dot{Y} + \operatorname{Sen} a \Sigma x \dot{Y} \dots (35)$$

e fazendo as substituições, e reduções convenientes

$$A' \operatorname{Sen} mX = \operatorname{Cos} a \Sigma y X + \operatorname{Sen} a \Sigma y Y \dots (36)$$

$$B' \operatorname{Sen} m'X = -\operatorname{Sen} a \Sigma y X + \operatorname{Cos} a \Sigma y Y \dots (37)$$

As equações (32, 33, 36, 37) obter-se-hão mais facilmente pelo seguinte processo. As formulas (26, 27, 34, 35), tendo em vista as equações

$$x = \dot{x} \operatorname{Cos} a - \dot{y} \operatorname{Sen} a, \quad y = \dot{x} \operatorname{Sen} a + \dot{y} \operatorname{Cos} a,$$

transformão-se immediatamente em

$$\left. \begin{aligned} A' \text{ Cos } mX = \Sigma x\dot{X}; B' \text{ Cos } m'X = \Sigma x\dot{Y} \\ A' \text{ Sen } mX = \Sigma y\dot{X}; B' \text{ Sen } m'X = \Sigma y\dot{Y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38).$$

Estas ultimas equações tambem se deduzirão directamente por considerações analogas ás que nos servirão para estabelecer as equações (21, 22, 24, 25). Das equações (38) deduziremos finalmente as formulas (32, 33, 36, 37) por meio das relações

$$\dot{X} = X \text{ Cos } a + Y \text{ Sen } a; \dot{Y} = -X \text{ Sen } a + Y \text{ Cos } a.$$

Combinando as equações (32, 33), e depois as equações (36, 37), obteremos

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \text{ Cos}^2 mX + B'^2 \text{ Cos}^2 m'X = \Sigma^2 xX + \Sigma^2 xY \\ A'^2 \text{ Sen}^2 mX + B'^2 \text{ Sen}^2 m'X = \Sigma^2 yX + \Sigma^2 yY \end{aligned} \right\} \dots\dots (39).$$

Se multiplicarmos entre si as equações (32, 36), e do mesmo modo as equações (33, 37), teremos sommando ordenadamente os resultados, e reduzindo

$$A'^2 \text{ Sen } mX \text{ Cos } mX + B'^2 \text{ Sen } m'X \text{ Cos } m'X = \Sigma xX \Sigma yX + \Sigma xY \Sigma yY \dots (40).$$

Suppondo agora que permanecem fixos os eixos  $OX, OY$ , e que os eixos  $OX', OY'$  rotão positivamente até completarem uma circumferencia na sua rotaçào; se considerarmos que  $A', B', m, m'$  são sempre as quantidades que analogamente correspondem a cada posição do systema movel  $X'OY'$ , reconhece-se que os primeiros membros das equações (39, 40) conservão uma grandeza invariavel. Suppondo por tanto que  $A', B'$  são linhas sempre tomadas nas direcções dos braços  $m, m'$ , concluir-se-ha, que tomando os eixos  $OX, OY$  na direcção dos semieixos  $A, B$  (sendo  $A > < = B$ ) de uma ellipse cujo centro seja  $O$ , e cujos diametros conjugados sejam  $A', B'$ , teremos, chamando  $\alpha, \alpha'$  os angulos que  $A', B'$  fazem com  $OX$

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha + B'^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha' &= A^2 \\ A'^2 \operatorname{Sen}^2 \alpha + B'^2 \operatorname{Sen}^2 \alpha' &= B^2 \\ A'^2 \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + B'^2 \operatorname{Sen} \alpha' \operatorname{Cos} \alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41),$$

Como os valores dos primeiros membros não mudão para qualquer rotação do systema movel  $X'OY'$ , e como rotando este  $360^\circ$ ,  $A'$ ,  $B'$  devem tambem continuamente ter descripto uma circumferencia, conclue-se que todas as transformações de um grupo de dous binarios gyrantes, que equivalen a um systema de binarios situados em planos parallelos, obtem-se dando aos braços  $m$ ,  $m'$  todas as direcções

combinadas que representão os semidiametros conjugados de uma ellipse, e dando aos momentos maximos  $A' = mX_1$ ,

$B' = m'Y_1$ , a grandeza correspondente aos ditos semidiametros.

Esta ellipse, que denominaremos *ellipse de redução*, fica determinada logo que, fazendo a decomposição das forças relativamente a um systema d'eixos  $OX'$ ,  $OY'$ , obtivermos as linhas  $A'$ ,  $B'$ , e os angulos que ellas formão com o eixo  $OX'$ , o que é dado pelas formulas (23, 24, 25). Se conhecessemos só  $A'$ ,  $B'$ , e o angulo  $\omega$  rotação directa de  $A'$  até  $B'$ , a ultima das equações (41), que se transforma em

$$A'^2 \operatorname{Sen} 2 \alpha + B'^2 \operatorname{Sen} (2 \alpha + 2 \omega) = 0,$$

dar-nos-hia

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{-B'^2 \operatorname{Sen} 2 \omega}{A'^2 + B'^2 \operatorname{Cos} 2 \omega},$$

donde se deduzem para  $\alpha$  quatro valores  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 + 90^\circ$ ,  $\alpha_1 + 180^\circ$ ,  $\alpha_1 + 270^\circ$ , que correspondem ás quatro direcções dos semieixos. Qualquer destes valores que se adopte dará evidentemente a mesma grandeza, e direcção para os eixos  $2A$ ,  $2B$ .

71. Para definir completamente as transformações, que soffre um grupo de dous binarios gyrantes resultantes de um systema de binarios parallelos a um plano dado, resta-nos unicamente indicar a variação, que experimentão as direcções dos braços  $m$ ,  $m'$  em relação á variação de direcção

das forças  $X_1, Y_1$ , isto é, em virtude da rotação do systema  $X'OY'$ .

Sejão ainda  $Om, Om'$  (fig. 11) os braços correspondentes a dous semidiametros conjugados da ellipse de reduçção;  $XOY$  a posição respectiva dos eixos moveis;  $Om, Om', X'OY'$  outra posição qualquer dos braços, e eixos coordenados respectivos.

Quadrando e sommando as equações (32, 36), e procedendo semelhantemente com as equações (33, 37), obtaremos

$$A'^2 = \text{Cos}^2 \alpha (\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX) + \text{Sen}^2 \alpha (\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY) + 2 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha (\Sigma xX \Sigma xY + \Sigma yX \Sigma yY);$$

$$B'^2 = \text{Sen}^2 \alpha (\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX) + \text{Cos}^2 \alpha (\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY) - 2 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha (\Sigma xX \Sigma xY + \Sigma yX \Sigma yY);$$

isto é, se supozermos que os diametros  $2A_1, 2B_1$  não são os eixos, teremos pelas formulas (20, 21, 22)

$$A'^2 = A_1^2 \text{Cos}^2 \alpha + B_1^2 \text{Sen}^2 \alpha + 2 A_1 B_1 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha \text{Cos} (m'X - mX);$$

$$B'^2 = A_1^2 \text{Sen}^2 \alpha + B_1^2 \text{Cos}^2 \alpha - 2 A_1 B_1 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha \text{Cos} (m'X - mX);$$

ou, chamando  $\omega$  o angulo que entre si fazem os semidiametros  $A_1, B_1$

$$A'^2 = A_1^2 \text{Cos}^2 \alpha + B_1^2 \text{Sen}^2 \alpha + 2 A_1 B_1 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha \text{Cos} \omega;$$

$$B'^2 = A_1^2 \text{Sen}^2 \alpha + B_1^2 \text{Cos}^2 \alpha - 2 A_1 B_1 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha \text{Cos} \omega.$$

Mas se para maior simplicidade da relação que pretendemos determinar, supozermos que  $A_1, B_1$  são os semieixos  $A, B$ , as equações precedentes reduzem-se a

$$\left. \begin{aligned} A'^2 &= A^2 \text{Cos}^2 \alpha + B^2 \text{Sen}^2 \alpha \\ B'^2 &= A^2 \text{Sen}^2 \alpha + B^2 \text{Cos}^2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42).$$

Ora sendo  $\alpha, \alpha'$  os angulos que  $A', B'$  fazem com  $A$  temos, como é sabido

$$\left. \begin{aligned} A'^2 &= \frac{A^2 B^2}{A^2 \text{Sen}^2 \alpha + B^2 \text{Cos}^2 \alpha} \\ B'^2 &= \frac{A^2 B^2}{A^2 \text{Sen}^2 \alpha' + B^2 \text{Cos}^2 \alpha'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43).$$

Das equações (42) deduz-se facilmente

$$\left. \begin{aligned} \text{Sen}^2 \alpha &= \frac{A^2 - A'^2}{A^2 - B^2} ; \text{Cos}^2 \alpha = \frac{A'^2 - B^2}{A^2 - B^2} \\ \text{Sen}^2 \alpha &= \frac{B'^2 - B^2}{A^2 - B^2} ; \text{Cos}^2 \alpha = \frac{A^2 - B'^2}{A^2 - B^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

formulas que nos dão a rotação  $\alpha$  dos eixos  $OX'$ ,  $OY'$  expressa nas grandezas dos semidiâmetros conjugados, e dos semieixos. E' facil de perceber a ambiguidade, que deve subsistir na determinação do angulo  $\alpha$ , uma vez que só sejião conhecidas as graudezas dos eixos, e diâmetros conjugados.

Semelhantermente deduziremos as rotações  $\alpha$ ,  $\alpha'$  dos braços  $m$ ,  $m'$  em relação ao braço correspondente ao semieixo  $A$ , empregando as formulas (43), que nos darão

$$\left. \begin{aligned} \text{Sen}^2 \alpha &= \frac{B^2}{A'^2} \cdot \frac{A^2 - A'^2}{A^2 - B^2} ; \text{Cos}^2 \alpha = \frac{A^2}{A'^2} \cdot \frac{A'^2 - B^2}{A^2 - B^2} \\ \text{Cos}^2 \alpha' &= \frac{A^2}{B'^2} \cdot \frac{B'^2 - B^2}{A^2 - B^2} ; \text{Sen}^2 \alpha' = \frac{B^2}{B'^2} \cdot \frac{A^2 - B'^2}{A^2 - B^2} \end{aligned} \right\} (45).$$

Comparando as formulas que se correspondem nos schemas (44, 45), acharemos facilmente

$$\left. \begin{aligned} \text{Sen}^2 \alpha &= \frac{A'^2}{B^2} \text{Sen}^2 \alpha \\ \text{Cos}^2 \alpha &= \frac{A'^2}{A^2} \text{Cos}^2 \alpha \\ \text{Sen}^2 \alpha &= \frac{B'^2}{A^2} \text{Cos}^2 \alpha' \\ \text{Cos}^2 \alpha &= \frac{B'^2}{B^2} \text{Sen}^2 \alpha' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

Se for directo o systema dos dous binarios resultantes, os angulos  $a$ ,  $\alpha$  crescerão continuamente desde o ponto em que  $A'$ ,  $B'$  coincidem com  $A$ ,  $B$ , e em que é  $a = \alpha = 0$ ; segue-se pois que  $\text{Sen } a$ ,  $\text{Sen } \alpha$ , e  $\text{Cos } a$ ,  $\text{Cos } \alpha$  devem correspondentemente ter o mesmo signal: tambem desde que  $a > 0$ , sendo  $\alpha' > 90$ , em quanto for  $a < 90$ , teremos (§ 68)  $\alpha' < 180^\circ$ ; logo  $\text{Cos } a$ , e  $\text{Sen } \alpha'$  devem tambem ter o mesmo signal; vê-se tambem que, nestas hypotheses,  $\text{Sen } a$ , e  $\text{Cos } \alpha'$  deverão ter differentes signaes. Se porém o systema dos dous binarios for inverso, reconhece-se por um modo analogo, em virtude do (§ 68), que apenas  $\text{Cos } a$ ,  $\text{Cos } \alpha$  devem tomar-se com o mesmo signal: logo das equações (46) concluem-se as seguintes formulas, nas quaes o superior dos signaes ambiguos corresponde ao systema directo, e o inferior ao systema inverso

$$\left. \begin{aligned} \pm \text{Sen } a &= \frac{A'}{B} \text{Sen } \alpha \\ \text{Cos } a &= \frac{A'}{A} \text{Cos } \alpha \\ -\text{Sen } a &= \frac{B'}{A} \text{Cos } \alpha' \\ \pm \text{Cos } a &= \frac{B'}{B} \text{Sen } \alpha' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

formulas que nos dão a rotação  $a$  doseixos  $OX'$ ,  $OY'$ , por meio da rotação  $\alpha$ , ou  $\alpha'$  de cada um dos braços dos dous binarios, ou reciprocamente.

Das equações (47) concluiremos

$$\pm \text{tg } a = \frac{A}{B} \text{tg } \alpha ; \mp \text{Cot } a = \frac{A}{B} \text{tg } \alpha' \dots \dots \dots (48)$$

formulas que representam mui simplesmente a relação entre a rotação do systema d'eixos  $X'OY'$ , e as rotações dos braços  $Om$ ,  $Om'$  dos binarios. A ambiguidade dos valores de  $a$  dados pela tangente, ou pela cotangente desaparece, advertindo, que no systema directo  $a$ ,  $\alpha$  são do mesmo qua-

drante, e  $\alpha'$  do quadrante seguinte a  $\alpha$ ; e que no systema inverso a correspondencia de  $\alpha$ ,  $\alpha'$  é inteiramente a mesma uma vez que mudemos o signal de  $\alpha$ .

Das equações (48) se conclue

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = -\operatorname{tg}^2 a \dots \dots \dots (49)$$

relação notavel por ser independente dos semieixos  $A$ ,  $B$ .

72. As equações (48) podem ser representadas por uma construcção geometrica muito simples. Seja  $AMM'$  (fig. 12) a ellipse de redução; sobre o eixo  $AB$  correspondente a  $A$  descreva-se um circulo  $ANN'$ ; para qualquer rotação dos eixos moveis sejam designadas as direcções dos semidiâmetros que representam os braços dos binarios pelas cordas supplementares  $BM$ ,  $AM$ : no systema directo suppor-se-ha que  $X$ , corresponde á direcção  $BM$ , e  $Y$ , á direcção  $AM$ : o contrario terá logar no systema inverso.

Suppondo  $NN'$  perpendicular a  $AB$ , teremos no systema directo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha' = \frac{NP}{MP} \operatorname{tg} MBP = \operatorname{tg} NBP;$$

$$\operatorname{Cot} \alpha = -\frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha' = \frac{NP}{MP} \operatorname{tg} MAP = \operatorname{tg} NAP = \operatorname{Cot} NBP, \text{ logo } \alpha = NBP;$$

Vê-se pois que gyrando  $N$  no sentido directo na circumferencia  $ANBN'$ , e indicando  $NBA$  a rotação directa dos eixos moveis em relação á posição que elles tomão quando o braço  $m$  tem a direcção  $OA$ , o ponto correspondente  $M$  na ellipse indicará as direcções respectivas  $BM$ ,  $AM$  dos braços  $m$ ,  $m'$ .

E' facil de demonstrar por um modo analogo, que quando o systema for inverso, serão correspondentemente  $BM$ ,  $MA$  as direcções dos braços  $m$ ,  $m'$  relativas á rotação inversa  $ABN'$  do eixo  $OX'$ .

73. Podemos tambem exprimir a rotação  $\alpha$  por meio do angulo  $\omega$  dos diâmetros conjugados, e pela grandeza dos eixos. Para isso deduziremos das equações (48), suppondo directo o systema dos binarios resultantes,

$$-\text{Cot } a = \frac{A}{B} \text{tg } (\omega + a) = \frac{A}{B} \cdot \frac{\text{tg } a + \text{tg } \omega}{1 - \text{tg } a \text{tg } \omega} = \frac{A}{B} \cdot \frac{\frac{B}{A} \text{tg } a + \text{tg } \omega}{1 - \frac{B}{A} \text{tg } a \text{tg } \omega}$$

$$= \frac{AB \text{tg } a + A^2 \text{tg } \omega}{AB - B^2 \text{tg } a \text{tg } \omega}, \text{ donde}$$

$$-AB \text{Cot } a + B^2 \text{tg } \omega = AB \text{tg } a + A^2 \text{tg } \omega,$$

que se reduz a

$$\text{tg}^2 a + \frac{A^2 - B^2}{AB} \text{tg } \omega \text{tg } a + 1 = 0 \dots \dots \dots (50).$$

Esta equação visivelmente dá quatro valores para  $a$ , que serão  $a_1$ ,  $90^\circ - a_1$ ,  $a_1 + 180^\circ$ ,  $270^\circ - a_1$ . Como em uma ellipse qualquer ha sempre dous systemas de diametros conjugados, que entre si fazem um angulo dado, e como em cada um desses systemas se podem tomar os braços  $m$ ,  $m'$

em sentidos oppostos, teremos representadas as quatro soluções, a que correspondem os valores de  $a$  dados pela equação (50), advertindo que essa equação tem logar sem alteração para o systema inverso, porquanto, pelas equações (48), passa-se de um dos systemas para o outro mudando  $a$ ,  $\omega$  em  $-a$ ,  $-\omega$ .

74. A equação (50) póde exprimir-se por meio dos semidiametros  $A'$ ,  $B'$  attendendo ás relações

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2; \quad AB = A'B' \text{Sen } \omega;$$

das quaes se deduz

$$(A^2 - B^2)^2 = A'^4 + B'^4 + 2 A'^2 B'^2 - 4 A'^2 B'^2 \text{Sen}^2 \omega = A'^4 + B'^4 + 2 A'^2 B'^2 \text{Cos}^2 \omega;$$

logo (50) muda-se em

$$\text{tg}^2 a + \frac{\sqrt{A'^4 + B'^4 + 2 A'^2 B'^2 \text{Cos}^2 \omega}}{A' B' \text{Cos } \omega} \text{tg } a + 1 = 0.$$

75. Os resultados a que chegámos (§§ 70, 71) ácerca das

condições que regulão a transformação de dous binarios gy-  
rantes, cujos braços não são paralelos, podem obter-se fa-  
cilmente pela seguinte construcção.

Seja  $(Om, X_1)$ ,  $(Om', Y_1)$  (Fig 13) um systema directo  
de dous binarios, cujas forças são respectivamente paralle-  
las aos eixos rectangulares  $OX$ ,  $OY$ ; supponhamos que se  
pretende transformar este grupo em outro, no qual os bra-  
ços serão perpendiculares entre si, bem como as forças.

Para mais facilidade da reducção, imagine-se que o sys-  
tema dado passou para uma configuração, na qual  $X_1$ ,  $Y_1$   
sejão parallelas a  $OX$ ,  $OY$  direcções dos braços perpendi-  
culares do segundo grupo. Por  $m$ ,  $m'$  tire-se uma recta  
que encontre em  $a$ ,  $b$  os eixos  $OX$ ,  $OY$ : se esta recta  
fosse parallelá a um dos eixos, deveríamos previamente  
transformar um dos binarios dados em outro de differente  
braço, o que mudaria a direcção de  $mm'$ .

Dos pontos  $m$ ,  $m'$  baixem-se as perpendiculares  $p$ ,  $p'$   
sobre  $OY$ ; faça-se  $Oe = e$ ;  $Oc' = e'$ ;  $Oa = a$ ;  $Ob = b$ ; de-  
componha-se  $X_1$  em duas forças parallelas  $X_1'$ ,  $X_1''$  appli-  
cadas aos centros  $a$ ,  $b$ ; semelhantemente substitua-se a  $Y_1$   
as forças  $Y_1'$ ,  $Y_1''$  applicadas aos mesmos centros; e fa-  
zendo uma decomposição analogá para as forças applicadas  
a  $O$ , o systema dado achar-se-ha substituido por quatro  
binarios gyrantes com os braços applicados dous a dous so-  
bre os eixos  $OX$ ,  $OY$ , e teremos

$$\left. \begin{aligned} X_1' &= \frac{p}{a} X_1; X_1'' = \frac{e}{b} X_1 \\ Y_1' &= \frac{p'}{a} Y_1; Y_1'' = \frac{e'}{b} Y_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

Compondo  $X_1'$ ,  $Y_1'$ , e do mesmo modo  $X_1''$ ,  $Y_1''$ , e reunindo  
semelhantemente as forças correspondentes no centro  $O$ , os  
binarios dados ficão transformados em outros dous  $(Oa, X)$ ,  
 $(Ob, Y)$ , cujos braços são perpendiculares.

Supponhamos agora, que se pretende que as forças  $X$ ,  
 $Y$  formem entre si um determinado angulo; fazendo  $XaX$   
 $= \phi$ ,  $YbY = \phi'$ , teremos

$$\text{tg } XY = \text{tg } (\phi + 90^\circ - \phi') = \text{Cot } (\phi' - \phi) = \frac{1 + \text{tg } \phi \text{tg } \phi'}{\text{tg } \phi' - \text{tg } \phi} = \frac{1 + \frac{Y_1'}{X_1'} \cdot \frac{X_1''}{Y_1''}}{\frac{X_1''}{Y_1''} - \frac{Y_1'}{X_1'}} =$$

$$= \frac{X'_1 Y''_1 + Y'_1 X''_1}{X'_1 X''_1 - Y'_1 Y''_1} = \frac{(pe' + p'e) X_1 Y_1}{pe X_1^2 - p'e' Y_1^2} \dots \dots \dots (52).$$

Se fizermos  $mOX = \alpha$ ;  $m'OX = \alpha'$ , teremos

$$p = m \text{ Cos } \alpha; \quad e = m \text{ Sen } \alpha; \quad p' = -m' \text{ Cos } \alpha'; \quad e' = m' \text{ Sen } \alpha' \dots \dots (53)$$

o por conseguinte o ultimo valor (52) será

$$\text{tg } XY = \frac{mm' (\text{Sen } \alpha' \text{ Cos } \alpha - \text{Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha') X_1 Y_1}{m^2 X_1^2 \text{ Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha + m'^2 Y_1^2 \text{ Sen } \alpha' \text{ Cos } \alpha'}$$

ou fazendo  $mOm' = \omega$

$$\text{tg } XY = \frac{mm' X_1 Y_1 \text{ Sen } \omega}{m^2 X_1^2 \text{ Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha + m'^2 Y_1^2 \text{ Sen } \alpha' \text{ Cos } \alpha'} \dots (54).$$

Sendo  $\alpha' = \alpha + \omega$ , vê-se que para qualquer posição dos eixos  $OX$ ,  $OY$ , apenas varia  $\text{tg } XY$  pela variação, que no seu denominador experimentar  $\alpha$ ; logo pôde dar-se a  $\text{tg } XY$  uma grandeza qualquer, com tanto que a formula (54) não dê  $\text{Sen } 2\alpha$  imaginario, poisque (54) não dá nunca  $\text{Sen}^2 2\alpha > 1$ .

Se pretendemos que seja  $XY = 90^\circ$ , faremos

$$m^2 X_1^2 \text{ Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha + m'^2 Y_1^2 \text{ Sen } \alpha' \text{ Cos } \alpha' = 0 \dots (55).$$

Tambem em presença das equações (53, 51), acharemos

$$m^2 X_1^2 \text{ Cos}^2 \alpha + m'^2 Y_1^2 \text{ Cos}^2 \alpha' = p^2 X_1^2 + p'^2 Y_1^2 = a^2 X_1^2 + a'^2 Y_1^2 = a^2 X^2 \dots (56)$$

$$m^2 X_1^2 \text{ Sen}^2 \alpha + m'^2 Y_1^2 \text{ Sen}^2 \alpha' = c^2 X_1^2 + c'^2 Y_1^2 = b^2 X_1^2 + b'^2 Y_1^2 = b^2 Y^2 \dots (57).$$

As equações (55, 56, 57) mostram que dando a  $A'$ ,  $B'$ ,  $A$ ,  $B$  as grandezas, e direcções que indicámos (§§ 69, 70), as duas primeiras são semidiametros conjugados da ellipse cujos semieixos são  $A$ ,  $B$ .

76. Determinemos finalmente a ligação entre os angulos  $\alpha$ ,  $\alpha'$ , e  $a = XaX$ : teremos

$$\text{tg } a = \frac{Y'_1}{X'_1}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{e}{p}; \quad \text{tg } \alpha' = -\frac{e'}{p'}; \quad \frac{Y'_1}{X'_1} = \frac{X}{Y} = \frac{X'_1}{Y'_1}, \text{ donde}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{X}{Y} \cdot \frac{X''}{X'} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{e}{b} \cdot \frac{a}{p} = \frac{A}{B} \cdot \operatorname{tg} \alpha' \\ \operatorname{Cot} \alpha &= \frac{X}{Y} \cdot \frac{Y''}{Y'} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{e'}{b} \cdot \frac{a}{p} = -\frac{A}{B} \cdot \operatorname{tg} \alpha' \end{aligned} \right\} \dots\dots (58).$$

Como tambem tinhamos achado (§ 71). Se tomarmos pois outro systema de semidiametros conjugados  $A''$ ,  $B''$  na ellipse cujos semieixos são  $A$ ,  $B$ , e na direcção daquelles imaginarmos dous braços  $m$ ,  $m'$  de dous

binarios cujas forças  $X''$ ,  $Y''$  sejam taes que tenhamos  $m X'' = A''$ ;  $m' Y'' = B''$ , e dando-lhes direcções perpen-

diculares, e taes que o valor correspondente de  $a$  satisfaça ás equações (58), concluir-se-ha que o grupo  $(m, X'')$ ,  $(m', Y'')$  equivale a  $(a, X)$ ,  $(b, Y)$ , e por conseguinte a

$(m, X)$ ,  $(m', Y)$ : logo todos os grupos de dous binarios equivalentes devem satisfazer ás condições, que acabámos de indicar, visto que dada uma posição dos eixos moveis  $OX'$ ,  $OY'$ , aos quaes devão ser parallelas as forças de dous binarios, ficão desde logo determinados os seus momentos maximos, e as direcções dos seus braços (§ 66).

Se o systema dos dous binarios dados fosse inverso, isto é, se suppossemos trocada a posição dos pontos  $m$ ,  $m'$ , empregariamos uma construcção, e deducção inteiramente analogas ao que precede, verificando-se as equações (55, 56, 57, 58) com a simples mudança de signal nos ultimos membros de (58).

77. Analysaremos actualmente alguns casos particulares que póde offerecer a redução de um systema de binarios gyranes parallelas a um plano. Até aqui supposemos que o systema dado equivalia a dous binarios gyranes de braços não parallelas; vejamos porém quando se reduz o systema a um só binario, ou ao equilibrio para todas as configurações.

Teremos um só binario: 1.º Quando os braços dos dous binarios resultantes forem parallelas (§ 58): 2.º Quando ou o braço, ou cada uma das forças de um delles forem zero. Para exprimir analyticamente ás condições destes casos, sejam  $m$ ,  $m'$  os braços dos dous binarios;  $X'$ ,  $Y'$  as forças cor-

respondentes;  $x, y$  as coordenadas do centro das componentes positivas das forças dadas em relação ao eixo dos  $x$ ;  $x', y'$  as coordenadas do grupo correspondente de componentes negativas;  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{x}', \ddot{y}'$  as coordenadas dos centros relativos ao eixo dos  $y$ ; os casos da redução do systema dado a um só binario satisfazem por tanto a alguma das cinco condições seguintes

$$\frac{x - x'}{y - y'} = \frac{\ddot{x} - \ddot{x}'}{\ddot{y} - \ddot{y}'} ;$$

$$x - x' = y - y' = 0 ;$$

$$\ddot{x} - \ddot{x}' = \ddot{y} - \ddot{y}' = 0 ;$$

$$X_i = 0 ;$$

$$Y_i = 0 .$$

Estas condições reduzem-se a uma só, isto é

$$\frac{(x - x') X_i}{(y - y') X_i} = \frac{(\ddot{x} - \ddot{x}') Y_i}{(\ddot{y} - \ddot{y}') Y_i} ,$$

ou

$$\frac{\sum x X}{\sum y X} = \frac{\sum x Y}{\sum y Y} \dots \dots \dots (59)$$

devendo advertir-se que as quantidades  $\sum xX, \sum yX, \sum xY, \sum yY$  não mudão de grandeza deslocando-se os eixos  $OX, OY$  parallelamente, pois que vg.

$$\sum xX = \sum xX + x \sum X = \sum (x + x) X .$$

Verificada a condição (59) para uma posição dos eixos  $OX, OY$ , subsistirá tambem para qualquer rotação delles em torno da origem, suppondo sempre que nesse caso se faz uma nova decomposição das forças dadas; porquanto essa rotação não alterando a natureza do systema de binarios

dados, este deve sempre reduzir-se a um só binario. Tambem seria facil de reconhecer pelas equações (28, 29, 30, 31), que a condição

$$\frac{\sum \dot{x} \dot{X}}{\sum \dot{y} \dot{X}} = \frac{\sum \dot{x} \dot{Y}}{\sum \dot{y} \dot{Y}}$$

resulta de (59), combinando devidamente as fracções (59) por meio de multiplicação dos seus termos por factores iguaes para cada uma, e pela somma dos numeradores, e denominadores das fracções resultantes.

Igualmente se deduziria com facilidade, que mudando a direcção dos eixos  $OX, OY$ , devem permanecer constantes as direcções dos braços dos dous binarios resultantes, ou do binario unico a que elles se reduzem.

78. Para que o systema de binarios dado produza o equilibrio em todas as configurações, devem aniquilar-se separadamente os dous binarios resultantes, para o que deverá ser

$$(x-x') X_r=0; (y-y') X_r=0; (x-x') Y_r=0; (y-y') Y_r=0,$$

isto é, teremos as quatro condições

$$\sum xX = \sum xY = \sum yX = \sum yY = 0 \dots\dots\dots (60)$$

as quaes em presença das equações (28, 29, 30, 31) dão para qualquer outra posição dos eixos  $OX, OY$

$$\sum \dot{x} \dot{X} = \sum \dot{x} \dot{Y} = \sum \dot{y} \dot{X} = \sum \dot{y} \dot{Y} = 0.$$

As condições (59, 60) subsistem do mesmo modo para um systema d'eixos obliquos.

79. Para que a ellipse de redução se converta em um circulo deveremos ter

$$A' = B'; B'OX - A'OX = \pm 90^\circ,$$

isto é, pelas formulas (23, 24, 25), omitindo a notação'

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 x\dot{X} + \varepsilon^2 y\dot{X} &= \varepsilon^2 x\dot{Y} + \varepsilon^2 y\dot{Y} \\ \varepsilon x\dot{X} \varepsilon x\dot{Y} + \varepsilon y\dot{X} \varepsilon y\dot{Y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61).$$

E como a ellipse de reduccão é independente do systema d'eixos que se adopta, verificadas as condições precedentes, será tambem para outro systema d'eixos

$$\varepsilon^2 \dot{x}\dot{X} + \varepsilon \dot{y}\dot{X} = \varepsilon^2 \dot{x}\dot{Y} + \varepsilon^2 \dot{y}\dot{Y};$$

$$\varepsilon \dot{x}\dot{X} \varepsilon \dot{x}\dot{Y} + \varepsilon \dot{y}\dot{X} \varepsilon \dot{y}\dot{Y} = 0.$$

80. Se tivermos um systema de forças gyrantes paralelas a um plano, e cuja resultante seja nulla, e se as decomposermos em relação a dous eixos rectangulares situados nesse plano, o systema ficará em geral reduzido a dous binarios de forças paralelas ao mesmo plano, e cujos braços podem ter uma direcção qualquer no espaço. Se ao systema dado equivaler cada um de dous grupos de dous binarios gyrantes  $(m, X_1)$ ,  $(m', Y_1)$ , e  $(\dot{m}, \dot{X}_1)$ ,  $(\dot{m}', \dot{Y}_1)$ , as forças  $X_1, Y_1, \dot{X}_1, \dot{Y}_1$  serão paralelas ao plano a que são paralelas as forças dadas, e os braços  $m, m', \dot{m}, \dot{m}'$  serão todos paralelos a um só plano (§ 67). Todos os grupos de dous binarios equivalentes ao systema dado terão pois entre si a ligação dada pela ellipse da reduccão, e pelas equações (48), visto que apesar de ser differente o plano paralelo ás forças  $X_1, Y_1, \dot{X}_1, \dot{Y}_1$  do plano paralelo aos respectivos braços, o angulo vg. de  $\dot{X}_1$  e  $\dot{X}_1$  não muda quando se passa da configuração que se considera, para outra em que o plano paralelo ás forças  $X_1, Y_1, \dot{X}_1, \dot{Y}_1$  coincida em direcção com o plano paralelo aos braços  $m, m', \dot{m}, \dot{m}'$ , e neste caso tem logar como vimos as equações (48).

81. Procedendo por um modo analogo ao que empregámos (§ 77), reconhecer-se-ha facilmente, que as condições necessarias, e sufficientes para que um systema de forças

parallelas a um plano, e que não tem resultante, se reduz a um só binario gyrante, são as seguintes, em que se adopta um systema qualquer de eixos rectangulares, ou obliquos  $OX, OY, OZ$ , sendo os dous primeiros situados n'um plano paralelo á direcção das forças do systema dado na configuração que se considera, plano que por conseguinte poderá ter uma direcção qualquer no espaço

$$\frac{\Sigma xX}{\Sigma xY} = \frac{\Sigma yX}{\Sigma yY} = \frac{\Sigma zX}{\Sigma zY} \dots \dots \dots (62).$$

82. Para que o systema dado se equilibre em todas as configurações deverão verificar-se as seis condições

$$\Sigma xX = \Sigma xY = \Sigma yX = \Sigma yY = \Sigma zX = \Sigma zY = 0 \dots \dots (63).$$

83. Fazendo a reducção das forças dadas relativamente a um systema determinado d'eixos rectangulares, serão as grandezas  $m, m'$  dos braços dos dous binarios resultantes dadas pelas equações

$$m = \frac{\sqrt{(\underline{x-x'})^2 + (\underline{y-y'})^2 + (\underline{z-z'})^2}}{X_1} = \frac{\sqrt{\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX + \Sigma^2 zX}}{X_1}$$

$$m' = \frac{\sqrt{(\underline{x-x'})^2 + (\underline{y-y'})^2 + (\underline{z-z'})^2}}{Y_1} = \frac{\sqrt{\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY + \Sigma^2 zY}}{Y_1}$$

e por conseguinte os semidiametros  $A', B'$  correspondentes na ellipse de reducção serão expressos por

$$\left. \begin{aligned} A' &= \sqrt{\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yX + \Sigma^2 zX} \\ B' &= \sqrt{\Sigma^2 xY + \Sigma^2 yY + \Sigma^2 zY} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64).$$

Os angulos que  $m, m'$  fazem com os tres eixos são dados pelas equações

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } mX &= \Sigma xX : A'; & \text{Cos } m'X &= \Sigma xY : B' \\ \text{Cos } mY &= \Sigma yX : A'; & \text{Cos } m'Y &= \Sigma yY : B' \\ \text{Cos } mZ &= \Sigma zX : A'; & \text{Cos } m'Z &= \Sigma zY : B' \end{aligned} \right\} \dots \dots (65)$$

e por conseguinte o angulo que entre si fórmão  $m$ ,  $m'$  é dado pela equação

$$\text{Cos } m m' = \frac{\Sigma x X \Sigma x Y + \Sigma y X \Sigma y Y + \Sigma z X \Sigma z Y}{\sqrt{\Sigma^2 x X + \Sigma^2 y X + \Sigma^2 z X} \sqrt{\Sigma^2 x Y + \Sigma^2 y Y + \Sigma^2 z Y}} \dots (66)$$

Finalmente para que a ellipse de redução se converta em um circulo, deveremos ter

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^2 x X + \Sigma^2 y X + \Sigma^2 z X &= \Sigma^2 x Y + \Sigma^2 y Y + \Sigma^2 z Y \\ \Sigma x X \Sigma x Y + \Sigma y X \Sigma y Y + \Sigma z X \Sigma z Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (67).$$

84. Tanto no systema de binarios cujos braços, e forças podem tomar-se todos parallellos a um só plano, como n'um systema qualquer de forças parallelas a um plano, e destituido de resultante, quando a ellipse de redução se transforma em um circulo as equações (48) mudão-se em

$$\pm \text{tg } a = \text{tg } \alpha; \quad \mp \text{Cot } a = -\text{Cot } \alpha;$$

isto é, nas transformações de um systema em que se verificão as condições indicadas (67), passando-se do grupo de dous braços perpendiculares  $m$ ,  $m'$  dos dous binarios resultantes, para outro grupo equivalente  $\bar{m}$ ,  $\bar{m}'$ , a rotação que

experimentou cada um dos braços será igual em grandeza á rotação, que teve logar nas forças correspondentes. Estas rotações são porém em sentidos contrarios nos systemas inversos.

85. Os principios expostos servir-nos-hão facilmente para representar da maneira mais simples um systema qualquer de forças que gyrão no espaço, e que por em quanto supporemos terem uma resultante.

Em uma configuração qualquer adopte-se um systema qualquer d'eixos coordenados, em que o eixo dos  $z$  tenha a direcção da resultante das forças dadas na configuração que se considera. Decomponha-se cada uma das forças parallelamente aos tres eixos; todas as componentes  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{Z}'$ ,  $\mathcal{Z}''$ , etc. tem como resultante a resultante  $R$  do systema applicada ao centro daquellas forças parallelas; as outras com-

ponentes  $X, X', \text{etc.}, Y, Y', \text{etc.}$  reduzem-se em geral a dous binarios gyranes cujas forças são parallelas ao plano  $xy$ . Se variar de qualquer modo no espaço a direcção do plano de redução  $xy$ , a grandeza de  $R$  não muda; variará porêem continuamente a situação do seu centro, situação que todavia é independente das direcções, que nesse plano se derem aos eixos dos  $x$ , e  $y$ , suppondo sempre que  $R$  não é parallelas ao plano  $xy$ .

Desta decomposição, e redução se conclue em geral, que um systema qualquer de forças gyranes, que tem uma resultante, equivale a essa resultante gyrando no respectivo centro, e a dous binarios cujas forças são parallelas a um plano arbitrario não parallelas a  $R$ .

86. O systema pôde tambem reduzir-se, em casos particulares, a  $R$  gyrando no centro respectivo, e a um só binario, ou simplesmente a uma força gyranes  $R$ . As condições para a existencia destes dous casos são as que indicámos (62, 63): adiante demonstraremos que se qualquer desses casos se verificar para a redução das forças em relação a um systema d'eixos  $OX, OY, OZ$ , terá logar para qualquer outro systema  $OX', OY', OZ'$ . Além de infinitas outras especies de systemas de forças, o primeiro caso tem especialmente logar quando as forças dadas são parallelas a um plano, e o segundo quando as ditas forças são parallelas entre si.

87. Para qualquer configuração o centro da resultante relativo a qualquer systema d'eixos de redução, será dado pelas equações

$$x_1 = \frac{\sum xZ}{R}; \quad y_1 = \frac{\sum yZ}{R}; \quad z_1 = \frac{\sum zZ}{R} \dots \dots \dots (68).$$

O centro da resultante denomina-lo-hemos *centro do systema* quando o eixo dos  $z$  se toma perpendicular ao plano  $xy$ . A posição do centro da resultante é fixa para todas as configurações, sendo eixos directrizes os de redução.

88. Como vimos no (§ 85) a posição do centro da resultante depende só da direcção do plano de redução  $xy$ , e como esta direcção é fixada por dous angulos  $\psi, \varphi$ , as equações (68) podem representar-se por

$$x_1 = F(\psi, \varphi); \quad y_1 = F_I(\psi, \varphi); \quad z_1 = F_{II}(\psi, \varphi);$$

conclue-se pois que o lugar de todos os centros da resultante é em geral uma superficie. Para deduzir a equação desta superficie, supponhâmos que as equações (68) se referem a um systema qualquer de eixos rectangulares, ou obliquos  $OX, OY, OZ$ ; sejam  $x, y, z$  as coordenadas do

centro da resultante, suppondo que a decomposição das forças se fez em relação a outro systema qualquer de eixos coordenados  $OX', OY', OZ'$ , mas referindo aquellas coordenadas, e as dos centros das forças dadas aos eixos  $OX, OY, OZ$ , teremos

$$x = \frac{\Sigma xZ'}{R}; y = \frac{\Sigma yZ'}{R}; z = \frac{\Sigma zZ'}{R};$$

e como podemos suppor

$$Z' = p X + p' Y + Z \dots \dots \dots (69)$$

teremos

$$\left. \begin{aligned} x &= p \frac{\Sigma xX}{R} + p' \frac{\Sigma xY}{R} + \frac{\Sigma xZ}{R} \\ y &= p \frac{\Sigma yX}{R} + p' \frac{\Sigma yY}{R} + \frac{\Sigma yZ}{R} \\ z &= p \frac{\Sigma zX}{R} + p' \frac{\Sigma zY}{R} + \frac{\Sigma zZ}{R} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70).$$

Os ultimos termos destas equações desaparecem se a origem  $O$  for o centro da resultante correspondente aos eixos

$OX, OY, OZ$ . Nessa hypothese se chamarinos  $\ddot{z}, \ddot{z}'$ , etc. as distancias perpendiculares dos centros de todas as forças dadas a um plano, que passando pelo centro  $O$  seja parallelo aos braços dos dous binarios, que resultão da decomposição das forças relativamente aos eixos  $OX, OY, OZ$ , (suppondo por em quanto que esses binarios se não reduzem a um só, ou ao equilibrio), e designando por  $a, a', a''$  os

cosenos dos angulos, que esses eixos fazem com a normal áquelle plano, teremos

$$\ddot{z} = ax + a'y + a''z;$$

logo das equações (70) conclue-se

$$ax + a'y + a''z = p \frac{\sum \ddot{z} X}{R} + p' \frac{\sum \ddot{z} Y}{R};$$

mas evidentemente é

$$\sum \ddot{z} X = \sum \ddot{z} Y = 0 \dots \dots \dots (71)$$

logo finalmente

$$ax + a'y + a''z = 0 \dots \dots \dots (72)$$

isto é, o logar de todos os centros da resultante é um plano, que passando pelo centro do systema, é paralelo ás direcções dos braços dos dous binarios resultantes correspondentes á decomposição das forças dadas em relação aos eixos  $OX, OY, OZ$ ; ora como esse plano tem uma posição determinada, e como é arbitrario aquelle systema d'eixos, comtante porém que seja constantemente  $OZ$  paralelo a  $R$ , conclue-se forçosamente outra notavel propriedade da redução das forças dadas relativamente a diferentes systemas d'eixos rectangulares, ou obliquos, e é que todos os braços dos binarios resultantes são paralelos ao plano dos centros da resultante.

Reciprocamente dado um systema de forças, que se reduz a uma força gyrante, e a dous binarios irreduziveis, podemos determinar a posição do plano dos eixos de redução  $OX', OY'$  tal que o centro  $O'$  da resultante  $R$  venha a ser collocado em qualquer ponto  $x, y, z$  do plano dos centros.

A equação do plano  $OX'Y'$  deduz-se facilmente da equação (69), advertindo que qualquer força  $P$  applicada a  $O$  tem por coordenadas do seu extremo em relação aos eixos  $OX, OY, OZ$  as componentes  $X, Y, Z$ ; e se  $P$  exis-

tir no plano  $OX'Y'$  será  $\dot{Z}=0$ ; logo a equação desse plano é

$$0 = pX + p'Y + Z.$$

Para determinar  $p, p'$  em relação a qualquer ponto  $x, y, z$  do plano dos centros da resultante, recorreremos ás equações (70) em que supomos ainda

$$\varepsilon xZ = \varepsilon yZ = \varepsilon zZ = 0.$$

Os valores de  $p, p'$  dados por duas quaesquer das equações (70) satisfazem á terceira, porque essas equações estão sujeitas á condição (72); e além disso esses valores são determinados e possíveis, porque no systema de forças dadas, não se reduzindo a um só os dous binarios resultantes, não podem verificar-se as condições (62), que são tambem condições analyticas da indeterminação, ou impossibilidade de  $p, p'$  dados pelas equações (70).

Se porém no systema de forças dado os dous binarios resultantes se reduzem a um só, as condições (62), far-nos-hão concluir das equações (70)

$$\dot{x} = qy; \dot{x} = q'z;$$

isto é, o logar dos centros da resultante será uma recta, a qual é paralela ao braço do binario unico resultante, pois que sendo agora paralelos os braços dos dous binarios resultantes, as condições (71), que no caso precedente correspondião a um plano determinado, que era o plano dos centros, são agora satisfeitas para qualquer plano paralelo a esses dous braços, ou ao braço do binario unico resultante. E vê-se tambem neste caso, que são paralelos todos os braços dos binarios resultantes correspondentes aos diversos systemas de eixos de redução. Finalmente se os dous binarios resultantes se equilibrassem em todas as configurações, as condições (63) reduzirião (70) a

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0,$$

isto é, darião a immobilidade do centro da resultante, o que aliás é evidente.

89. As conclusões a que chegámos no § antecedente podem tambem estabelecer-se por facéis considerações geometricas.

Seja o systema de forças dado reduzivel a uma força  $OR$  applicada ao centro  $O$  (fig. 14), e a dous binarios de braços  $Om$ ,  $Om'$ , e forças  $m\dot{X}_1$ ,  $m'Y_1$  divergentes. Se no plano  $mOm'$  tomarmos um ponto qualquer  $O'$ , e lhe applicarmos em sentidos contrarios duas forças iguaes, e parallelas a  $R$ , o systema dado equivalerá á força gyrante  $R'$  no centro  $O'$ , e aos tres binarios gyrantes  $Om\dot{X}_1$ ,  $Om'Y_1$ ,  $RO'R''$ . Este ultimo, como é facil de vêr, decompõe-se em dous cujos braços coincidem respectivamente com  $Om$ ,  $Om'$  em direcção e grandeza, e cujas forças serão parallelas a  $R$ . Compondo as forças applicadas em  $m$ ,  $m'$ , e semelhantemente as applicadas em  $O$ , o systema ficará reduzido á força gyrante  $O'R'$ , e a dous binarios gyrantes

$Om\dot{X}_1$ ,  $Om'Y_1$ , que são irreduziveis a um só binario. Com effeito em primeiro logar não é nulla nenhuma das forças

totaes  $\dot{X}_1$ ,  $Y_1$  applicadas a  $m$ ,  $m'$ , porque cada uma dellas é resultante de duas forças divergentes; depois reconhece-se

tambem, que as forças  $\dot{X}_1$ ,  $Y_1$  não podem ser parallelas, porque se o fossem, sel-o-hião tambem á intersecção dos planos

$X_1m\dot{X}_1$ ,  $Y_1m'Y_1$ ; e como estes planos são parallelos a

$R$ , a dita intersecção, e por conseguinte  $\dot{X}_1$ ,  $Y_1$  serião parallelas a  $R$ , o que é impossivel.

Para reconhecer finalmente, que não póde existir fóra do plano  $mOm'$  qualquer centro da resultante, bastará provar que é sempre possivel determinar nesse plano um ponto  $O'$  tal, que seja centro da resultante para uma determinada posição do plano dos eixos de reducção  $OX'$ ,  $OY'$ . Imagine-se pelas rectas  $X_1$ ,  $Y_1$  tirados planos parallelos a  $R$ , e sejão as intersecções destes com o plano  $OX'Y'$  parallelas ás rectas  $mr$ ,  $m'r'$ ; pelos pontos  $X_1$ ,  $Y_1$  tirem-se parallelamente a  $R$  as rectas  $X_1r$ ,  $Y_1r'$ ; sup-

ponhamos primeiro, que é. —  $R = X_1 r + Y_1 r'$ ; neste caso é claro, que é sempre possível determinar em  $m m'$ , ou no seu prolongamento um ponto  $O''$  tal, que transportando para elle a resultante  $OR$ , tenhamos o systema reduzido a essa força gyrate applicada em  $O''$ , e a dous binarios gy-rantes, cujas forças  $m r$ ,  $m' r'$  são parallelas ao plano  $O X_1 Y_1$ , e por conseguinte temos fixado o centro  $O''$  correspondente a esse plano de redução. Se porém não fosse

$$-R = X_1 r + Y_1 r',$$

e tivéssemos

$$n(X_1 r + Y_1 r') = -R \dots \dots \dots (73)$$

poderíamos transformar os binarios  $Om X_1$ ,  $Om' Y_1$ , conservando-lhes as mesmas direcções dos braços e das forças, dividindo por  $n$  os dous braços  $Om$ ,  $Om'$ , e por conseguinte em vez das forças  $X_1$ ,  $Y_1$ , teríamos  $n X_1$ ,  $n Y_1$ : logo conservando constantes na construcção que fizemos os angulos  $rm X_1$ ,  $r'm' Y_1$ , então em vez das forças  $X_1 r$ ,  $Y_1 r'$  teríamos  $n X_1 r$ ,  $n Y_1 r'$ , isto é, em virtude da equação (73), achar-nos-hiamos reduzidos á hypothese precedente. Se  $n$  fosse negativo deviamos em vez das forças  $X_1$ ,  $Y_1$  tomar as suas oppostas nos respectivos binarios, e tomar os braços  $Om$ ,  $Om'$  de modo, que formassem o angulo verticalmente opposto a  $mOm'$ . As outras propriedades que provámos no § precedente são mui facéis de concluir da construcção que fizemos, feitas as convenientes modificações, quando os dous binarios resultantes não são irreduzíveis.

90. Podemos tambem dest'outro modo representar simplesmente um systema de forças gy-rantes, que tem resultante. Para uma configuração dada adopte-se um systema qualquer d'eixos orthogonaes, ou obliquos, mas de modo, que  $R$  não seja parallela a nenhum delles, nem ao plano de dous quaesquer; decompondo todas as forças dadas parallelamente a esses eixos, o grupo correspondente a cada eixo equivale á sua resultante (que não póde aniquilar-se) gy-rando no respectivo centro: logo o systema dado equivale em geral a tres forças gy-rando em tres centros

distinctos, os quaes poderão, em casos particulares, reduzir-se a dous, ou a um sómente.

91. Supponhamos primeiro que os tres centros são distinctos, e se não achão em linha recta. Decomponha-se cada uma das resultantes parciaes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (fig. 15) em forças parallelas umas á sua resultante  $R$ , outras a um plano não paralelo a  $R$ ; as primeiras componentes equivalerão a  $R$  gyrando no centro respectivo; as outras componentes  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  é facil de reconhecer, que são todas divergentes, pois que se vg.  $Q$ ,  $Q'$  fossem parallelas,  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  seriam todas parallelas a um mesmo plano, o que é contra a hypothese. Tambem é claro, que deverá ser nulla a resultante de  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ . Isto supposto, em um plano paralelo a estas forças tomem-se dous eixos orthogonaes, ou obliquos, e taes que decompondo as ditas forças parallelamente aos mesmos eixos, nenhuma das componentes respectivas  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$  seja zero. A resultante das forças parallelas  $X_1$ ,  $X_2$  tenha  $M$  por centro; essa força será igual, parallelas, e contraria a  $X_0$ ; a resultante de  $Y_1$ ,  $Y_2$  não poderá ter por centro  $M$ , aliás  $Q'$ ,  $Q''$  seriam parallelas: seja pois  $N$  o centro respectivo, e a dita resultante será igual, parallelas, e contraria a  $Y_0$ . Logo o systema dado reduz-se a uma força  $R$  gyrando no centro determinado, e a dous binarios de braços não parallelas, e cujas forças formão o angulo dos eixos que adoptámos n'um plano paralelo a  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ , e são parallelas ao dito plano.

92. Se dous dos centros vg.  $O'$ ,  $O''$  se reunirem em um só  $O'$ , as duas forças  $Y$ ,  $Z$  reduzem-se a uma só  $Y'$  gyrando em  $O'$ ; então decompondo  $X$ ,  $Y'$  em forças parallelas a  $R$ , e outras  $Q$ ,  $Q'$  parallelas a um plano não paralelo a  $R$ , estas ultimas deverão ser iguaes, parallelas, e contrarias, isto é, o systema dado reduz-se a uma força gyrate  $R$ , e a um binario gyrate. Esta redução effeitua-se tambem quando os tres centros  $O$ ,  $O'$ ,  $O''$  sendo distinctos, se acharem situados em linha recta; porque nesse caso as tres forças  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  applicadas a tres centros em linha recta, e situadas no mesmo plano, sendo decompostas em relação a dous eixos quaesquer nesse plano, que não tornem zero nenhuma das respectivas componentes  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$ , concluir-se-ha facilmente que  $X_0$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  equivalerão a um binario gyrate cujo braço

ço existe sobre a linha dos tres centros  $O, O', O''$ , e que o mesmo deve acontecer ás forças  $Y_0, Y_1, Y_2$ ; ora dous binarios gyranes, que tem os braços na mesma direcção e ás forças divergentes reduzem-se sempre a um só binario gyranes; logo neste caso o systema de forças dado equivale tambem a uma força, e a um binario gyranes. Tambem na hypothese actual as tres forças gyranes  $X, Y, Z$  podem reduzir se a duas, pois que vg.  $Z$  póde decompor-se em duas forças applicadas aos centros  $O, O'$ , e depois podem compor-se as duas forças applicadas a cada um desses centros.

93. Finalmente se os tres centros  $O, O', O''$  se reduzirem a um só ponto, o systema dado equivale a uma só força gyranes.

94. Se não sendo nenhum dos eixos  $CX, CY, CZ$  (fig. 15) paralelo a  $R$ , esta força fosse vg. parallelamente ao plano  $ZCY$ , teriamos  $X=0$ ; as outras duas forças  $Y, Z$  poderião suppor-se ao mesmo centro, pois que para as obter poderíamos começar por decompor as forças dadas parallelamente a  $R$ , e aos eixos  $CX, CY$ ; as ultimas componentes darião em geral dous binarios gyranes, e as outras darião  $R$  applicada ao respectivo centro; depois esta equivaleria ás duas componentes  $Y, Z$  applicadas ao mesmo centro: deste modo se vê, que esta redução não tem differença essencial da que precedentemente fizemos suppondo um dos eixos parallelamente a  $R$ .

95. Os tres casos que considerámos da existencia de tres centros distinctos  $O, O', O''$ , de dous, ou de um sómente, correspondem como vimos, quando se toma um eixo  $OZ$  parallelamente a  $R$ , a ser o systema de forças dado reduzivel a uma força, e a dous binarios gyranes, ou a uma força, e a um binario gyranes, ou a uma só força gyranes; estes tres ultimos casos são essencialmente distinctos, isto é cada um delles subsiste qualquer que seja o plano dos eixos  $OX', OY'$ , como se conclue do que antecedentemente expusemos, e especialmente da construcção do (§ 89): logo tambem a existencia de um só, de dous, ou dos tres centros  $O, O', O''$  não depende do systema d'eixos  $CX, CY, CZ$  em relação aos quaes se faz a redução das forças dadas.

96. Sendo a natureza statica da existencia de sómente dous centros equivalente áquella de os tres centros se acharem em linha recta; e sendo o caracter geometrico da

primeira hypothese um caso particular do da segunda, se representarmos por  $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  as coordenadas dos centros, teremos as seguintes condições analyticas para as tres diversas classes de systemas gyran-tes, em que se suppõe haver resultante, e adoptar-se um systema de eixos coordenados rectangulares, ou obliquos, não sendo o plano de dous quaesquer delles paralelo á re-sultante do systema de forças dado :

$$O, O', O'' \text{ em linha recta, ou } \left. \begin{array}{l} \text{dous destes centros coincidentes} \end{array} \right\} \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} = \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2} = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} \dots (74)$$

$$O, O', O'' \text{ coincidentes } \left. \right\} x_0 = x_1 = x_2; y_0 = y_1 = y_2; z_0 = z_1 = z_2 \dots (75)$$

$$O, O', O'' \text{ distinctos, e } \left. \begin{array}{l} \text{não em linha recta} \end{array} \right\} \text{não existencia das condições (74).}$$

O caso particular de coincidirem vg.  $O, O'$ , que se com-prehende nas condições (74), seria mais explicitamente da-do pelas equações.

$$x_0 - x_1 = 0; y_0 - y_1 = 0; z_0 - z_1 = 0.$$

97. As condições analyticas (74), (75) equivalem a

$$\frac{\sum xX}{X} - \frac{\sum xY}{Y} = \frac{\sum yX}{X} - \frac{\sum yY}{Y} = \frac{\sum zX}{X} - \frac{\sum zY}{Y} \dots (76)$$

$$\frac{\sum xX}{X} - \frac{\sum xZ}{Z} = \frac{\sum yX}{X} - \frac{\sum yZ}{Z} = \frac{\sum zX}{X} - \frac{\sum zZ}{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sum xX}{X} = \frac{\sum xY}{Y} = \frac{\sum xZ}{Z} \\ \frac{\sum yX}{X} = \frac{\sum yY}{Y} = \frac{\sum yZ}{Z} \\ \frac{\sum zX}{X} = \frac{\sum zY}{Y} = \frac{\sum zZ}{Z} \end{array} \right\} \dots (77).$$

98. Poderemos pois classificar, e caracterizar todos os systemas gyran-tes em que a resultante não é nulla pela ma-neira indicada no seguinte quadro.

CLASSIFICAÇÃO

DOS SYSTEMAS DE FORÇAS GYRANTES DOTADOS DE RESULTANTE.

NATUREZA STATICA.		CARACTERES ANALYTICOS.		
	<i>Não sendo R parallela a nenhum dos planos dos eixos de redução.</i>	<i>Sendo R parallela ao eixo OZ.</i>	<i>Não sendo R parallela a nenhum dos planos dos eixos de redução.</i>	<i>Sendo R parallela ao eixo OZ.</i>
1. <sup>a</sup> Classe	Tres forças gyrrantes applicadas ao mesmo centro, isto é, uma só força gyrrante.	Uma força gyrrante.	(77) (§ 97)	(63) (§ 82)
2. <sup>a</sup> Classe	Tres forças gyrrantes applicadas a tres centros em linha recta, ou dous delles coincidentes, isto é, duas forças gyrrantes em centros distinctos.	Uma força gyrrante e um binario gyrrante, ou dous binarios reduziveis a um só.	(76) (§ 97)	(62) (§ 81)
3. <sup>a</sup> Classe	Tres forças gyrrantes applicadas a tres centros distinctos não situados em linha recta.	Uma força gyrrante, e dous binarios gyrrantes irreduziveis.	Negação da condição (76)	Negação da condição (62)

## II.

*Formulas da rotação de um systema rigido em torno de um ponto fixo.*

99. Quando se suppõe que um systema rigido soffreu uma deslocação; qualquer, ficando fixo um dos seus pontos, pode-se representar essa deslocação por meio dos tres seguintes systemas d'angulos:

1.º Tomando dous systemas de eixos rectangulares  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ,  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$ , tendo ambos por origem o ponto fixo do systema dado, sendo absolutamente fixos os primeiros eixos, e os segundos invariaveis em relação aos pontos do systema rigido que se considera; a deslocação é dada pelos nove cosenos  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ ,  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ , ligados pelas seis equações de condição conhecidas.

2.º Considerando ainda os dous systemas de eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ,  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$ , a posição do segundo em relação ao primeiro será tambem dada pelos tres seguintes angulos:  $\theta$  que entre si formão  $OZ$ ,  $OZ'$ ;  $\psi$  que faz com o eixo  $OX$  um determinado sentido da intersecção dos dous planos  $OXY$ ,  $OX'Y'$ ; e finalmente  $\phi$  angulo dessa direcção da intersecção, e do eixo  $OX'$ .

3.º Finalmente da posição  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  do systema rigido passa-se para outra posição qualquer  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  por meio de uma rotação  $\omega$  (que suppremos sempre no sentido directo) em torno de um eixo determinado. Com effeito do centro  $O$  com um raio qualquer descrevamos uma superficie espherica; os pontos d'intersecção desta com os dous systemas d'eixos rectangulares formarão os vertices de

dous triangulos esphericos trirectangulos  $XYZ$ ,  $X'Y'Z'$  (Fig. 16), que nos servirão para mais facilmente representar os dous systemas d'eixos rectangulares. Liguem-se  $X$ ,  $X'$ , e  $Y$ ,  $Y'$  por arcos de circulos maximos; pelos meios desses arcos levantem-se arcos perpendiculares de circulos maximos, que se encontrarão em  $C$ , e n'outro ponto  $C'$  diametralmente opposto. Tirando de  $C$  os arcos  $CX$ ,  $CX'$ ,  $CY$ ,  $CY'$ , teremos pela construcção indicada  $CX=CX'$ ;  $CY=CY'$ ; donde será o triangulo  $XCY=tri. X'CY'$ , e por tanto o angulo  $XCY=X'CY'$ ; logo subtrahindo o angulo commum  $X'CY$ , teremos o angulo  $XCX'=YCY'$ . Vê-se pois que da posição  $XYZ$  passa-se para  $X'Y'Z'$  por meio de uma rotação directa  $\omega = XCX'$  em torno do eixo  $OC$ . Se adoptassemos o eixo  $OC'$  a rotação seria  $360^\circ - \omega$ . Conclue-se tambem que será  $CZ=CZ'$ , e  $ZCZ'=\omega$ .

Designaremos por  $x$ ,  $y$ ,  $z$  os tres angulos  $CX$ ,  $CY$ ,  $CZ$  que fixão a direcção do eixo de rotação.

Vê-se pois que qualquer que seja o numero de rotações, ou deslocamentos que sollre o systema rigido  $XYZ$  para passar á posição  $X'Y'Z'$ , o deslocamento total reduz-se sempre a uma rotação directa  $\omega$  em torno de um eixo determinado pelos tres angulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

100. Podendo-se representar pelos tres systemas d'angulos indicados o deslocamento qualquer de um systema rigido, que conserva um ponto fixo, é conveniente estabelecer o modo de passar analyticamente de qualquer desses systemas de angulos para os outros dous. Temos por tanto a deduzir as formulas pelas quaes se faz essa transição nas seis combinações seguintes.

### 1.ª Combinação.

#### 1.º Systema de angulos expresso pelo 2.º

Se contarmos directamente o angulo  $\psi$ , desde  $0^\circ$  até  $360^\circ$ , e de  $OX$  até um tal sentido da intersecção dos dous planos  $OXY$ ,  $OX'Y'$ , que fazendo rotar o systema  $XYZ$  directamente um angulo  $\theta$  sobre aquella direcção, venha a coincidir o eixo  $OZ$  com o eixo  $OZ'$ ; e se contarmos o au-

gulo  $\varphi$  directamente no plano  $OX'Y'$  até ao eixo  $OX'$ , teremos pelas formulas devidas a Euler:

$$\left. \begin{aligned} a &= -\text{Sen } \varphi \text{ Sen } \psi \text{ Cos } \theta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \psi; \\ a' &= \text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \theta + \text{Cos } \varphi \text{ Sen } \psi; \\ a'' &= \text{Sen } \varphi \text{ Sen } \theta; \\ b &= -\text{Sen } \psi \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } \theta - \text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi; \\ b' &= \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \theta - \text{Sen } \varphi \text{ Sen } \psi; \\ b'' &= \text{Cos } \varphi \text{ Sen } \theta; \\ c &= \text{Sen } \psi \text{ Sen } \theta; \\ c' &= -\text{Cos } \psi \text{ Sen } \theta; \\ c'' &= \text{Cos } \theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (78).$$

2.<sup>a</sup> Combinação.

2.<sup>a</sup> Systema expresso pelo 1.<sup>o</sup>

Das formulas precedentes deduzem-se facilmente as seguintes, nas quaes se deve sempre tomar o radical  $\sqrt{1-c''^2}$  com o signal positivo:

$$\text{Cos } \theta = c'';$$

$$\text{Sen } \psi = \frac{c}{\text{Sen } \theta} = \frac{c}{\sqrt{1-c''^2}};$$

$$\text{Cos } \psi = \frac{-c'}{\text{Sen } \theta} = \frac{-c'}{\sqrt{1-c''^2}};$$

$$\text{tg } \psi = -\frac{c}{c'};$$

$$\text{Sen } \varphi = \frac{a''}{\text{Sen } \theta} = \frac{a''}{\sqrt{1-c''^2}};$$

$$\text{Cos } \varphi = \frac{b''}{\text{Sen } \theta} = \frac{b''}{\sqrt{1-c''^2}};$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{a''}{b''}.$$

3.ª Combinação.

1.º Systema expresso pelo 3.º

As fórmulas que dão esta transformação são as seguintes:

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \text{Cos } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos}^2 x; \\
 a' &= \text{Cos } z \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{ Cos } y; \\
 a'' &= -\text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{ Cos } z; \\
 b &= -\text{Cos } z \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{ Cos } y; \\
 b' &= \text{Cos } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos}^2 y; \\
 b'' &= \text{Cos } x \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } y \text{ Cos } z; \\
 c &= \text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{ Cos } z; \\
 c' &= -\text{Cos } x \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } y \text{ Cos } z; \\
 c'' &= \text{Cos } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos}^2 z.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (79);$$

Os valores de  $a$ ,  $b'$ ,  $c''$  deduzem-se facilmente dos triangulos  $XCX'$ ,  $YCY'$ ,  $ZCZ''$ , que dão respectivamente

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x \\
 b' &= \text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 y + \text{Cos}^2 y \\
 c'' &= \text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 z + \text{Cos}^2 z
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (80).$$

Para deduzir os outros valores convem-nos estabelecer as equações

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \text{Sen } YCZ \text{ Sen } y \text{ Sen } z \\ \cos y &= \text{Sen } ZCX \text{ Sen } z \text{ Sen } x \\ \cos z &= \text{Sen } XCY \text{ Sen } x \text{ Sen } y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (81).$$

A primeira destas equações deduz-se advertindo, que no triangulo  $XCZ$  temos

$$\cos x = \cos CYX \text{ Sen } y;$$

e no triangulo  $ZCY$

$$\text{Sen } ZCY = \frac{\text{Sen } ZYC}{\text{Sen } z} = \frac{\cos CYX}{\text{Sen } z}; \text{ logo } \cos CYX = \text{Sen } ZCY \text{ Sen } z,$$

e

$$\cos x = \text{Sen } ZCY \text{ Sen } y \text{ Sen } z.$$

As outras formulas (81) achão-se por um modo semelhante. Isto supposto teremos no triangulo  $X'CY$

$$\begin{aligned} a' &= \cos YCX' \text{ Sen } x \text{ Sen } y + \cos x \cos y = \cos (XCY - \omega) \text{ Sen } x \text{ Sen } y + \cos x \cos y \\ &= \cos XCY \text{ Sen } x \text{ Sen } y \cos \omega + \text{Sen } XCY \text{ Sen } x \text{ Sen } y \text{ Sen } \omega + \cos x \cos y, \end{aligned}$$

isto é, pela equação  $\cos XCY \text{ Sen } x \text{ Sen } y = -\cos x \cos y$ , e pela 3.ª das formulas (81) acharemos

$$a' = \cos z \text{ Sen } \omega + (1 - \cos \omega) \cos x \cos y.$$

Semelhantemente

$$a'' = \cos (ZCX + \omega) \text{ Sen } x \text{ Sen } z + \cos x \cos z;$$

$$b = \cos (XCY + \omega) \text{ Sen } x \text{ Sen } y + \cos x \cos y;$$

$$b'' = \cos (ZCY - \omega) \text{ Sen } y \text{ Sen } z + \cos y \cos z;$$

$$c = \cos (ZCX - \omega) \text{ Sen } x \text{ Sen } z + \cos x \cos z;$$

$$c' = \cos (ZCY + \omega) \text{ Sen } y \text{ Sen } z + \cos y \cos z;$$

e desenvolvendo os cosenos de arcos compostos, e servin-

do-nos das equações (81), chegaremos facilmente a demonstrar as formulas que nos dão os valores de  $a''$ ,  $b$ ,  $b''$ ,  $c$ ,  $c'$  do schema (79).

4.ª Combinação.

2.º *Systema expresso pelo 3.º*

Substituindo nas formulas da 2.ª combinação os valores de  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $a''$ ,  $b''$  achados para a 3.ª, teremos, adoptando nos radicaes unicamente o signal positivo,

$$\begin{aligned} \text{Cos } \theta &= \text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = \text{Cos } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos}^2 x = \text{Cos } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) (1 - \text{Cos}^2 x - \text{Cos}^2 y) \\ &= 1 - (1 - \text{Cos } \omega) (\text{Cos}^2 x + \text{Cos}^2 y) = 1 - (1 - \text{Cos } \omega) \text{Sen}^2 z; \end{aligned}$$

$$\text{Sen } \psi = (\text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{Cos } z) : \sqrt{1 - (\text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 x + \text{Cos}^2 z)^2};$$

$$\text{Cos } \psi = (\text{Cos } x \text{ Sen } \omega - (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } y \text{Cos } z) : \sqrt{1 - (\text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 x + \text{Cos}^2 z)^2};$$

$$\text{tg } \psi = (\text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{Cos } z) : (\text{Cos } x \text{ Sen } \omega - (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } y \text{Cos } z);$$

$$\text{Sen } \varphi = (-\text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{Cos } z) : \sqrt{1 - (\text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 x + \text{Cos}^2 z)^2};$$

$$\text{Cos } \varphi = (\text{Cos } x \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } y \text{Cos } z) : \sqrt{1 - (\text{Cos } \omega \text{ Sen}^2 x + \text{Cos}^2 z)^2};$$

$$\text{tg } \varphi = (-\text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } x \text{Cos } z) : (\text{Cos } x \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{Cos } y \text{Cos } z).$$

5.ª Combinação.

3.º *Systema expresso pelo 1.º*

Sommando as equações (80) acharemos

$$a + b + c'' = \text{Cos } \omega (3 - \text{Cos}^2 x - \text{Cos}^2 y - \text{Cos}^2 z) + \text{Cos}^2 x + \text{Cos}^2 y + \text{Cos}^2 z;$$

isto é,

$$2 \text{ Cos } \omega = a + b' + c'' - 1 \dots\dots\dots (82)$$

e por conseguinte

$$\text{Sen } \omega = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a+b'+c''-1}{2}\right)^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - (a+b'+c''-1)^2} \dots\dots (83)$$

Se subtrahirmos successivamente a 8.<sup>a</sup> da 6.<sup>a</sup> das formulas (79); depois a 3.<sup>a</sup> da 7.<sup>a</sup>; e finalmente a 4.<sup>a</sup> da 2.<sup>a</sup>, acharemos

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } x &= \frac{b'' - c'}{2 \text{ Sen } \omega} \\ \text{Cos } y &= \frac{c - a''}{2 \text{ Sen } \omega} \\ \text{Cos } z &= \frac{a' - b}{2 \text{ Sen } \omega} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (84)$$

isto é,

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } x &= \frac{b'' - c'}{\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2}} \\ \text{Cos } y &= \frac{c - a''}{\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2}} \\ \text{Cos } z &= \frac{a' - b}{\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (85)$$

Se em vez de  $a, a', a'', b, b',$  etc. empregassemos as designações  $\text{Cos } X'X, \text{Cos } X'Y,$  etc. as formulas (82, 83, 84, 85) tomarião uma fórmula mais symetrica, isto é, obteriamos

$$2 \text{ Cos } \omega = \text{Cos } X'X + \text{Cos } Y'Y + \text{Cos } Z'Z - 1;$$

$$\text{Cos } x = \frac{\text{Cos } Y'Z - \text{Cos } Z'Y}{2 \text{ Sen } \omega};$$

$$\text{Cos } y = \frac{\text{Cos } Z'X - \text{Cos } X'Z}{2 \text{ Sen } \omega};$$

$$\text{Cos } z = \frac{\text{Cos } X'Y - \text{Cos } Y'X}{2 \text{ Sen } \omega};$$

das quaes as tres ultimas tem uma certa analogia mnemonica com as formulas  $a = b'c'' - c'b''$ ,  $b = c'a'' - ac''$ , etc.

As formulas (82, 83, 85) effectuão a transição, que actualmente tinhamos em vista. No radical que entra nas formulas (83, 85) podemos arbitrariamente tomar o signal +, ou o signal -. Adoptando o signal + a formula (83) dará para  $\omega$  um valor  $< 180^\circ$ : tomando o signal - teremos  $\omega' = 360^\circ - \omega$ , e  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Cos } y$ ,  $\text{Cos } z$  mudarão simultaneamente de signal, isto é, em vez de considerarmos a rotação directa  $\omega$  em torno do eixo  $OC$ , considerámos a rotação directa  $360^\circ - \omega$  em torno de  $OC'$ : e como essas duas rotações são perfeitamente equivalentes, vê-se que é indifferente adoptar qualquer dos signaes nas formulas (83, 85).

Poderíamos chegar de um modo mais directo ás formulas (85) empregando o seguinte processo.

O eixo de rotação  $OC$  faz com os tres eixos  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  os mesmos angulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que tem logar em relação aos eixos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ : logo pela formula de geometria analytica, que nos dá o coseno da inclinação de duas rectas no espaço por meio dos angulos, que cada uma dellas faz com tres eixos rectangulares, teremos successivamente

$$\text{Cos } x = a \text{ Cos } x + a' \text{ Cos } y + a'' \text{ Cos } z; \quad \text{Cos } x = a \text{ Cos } x + b \text{ Cos } y + c \text{ Cos } z;$$

$$\text{Cos } y = b \text{ Cos } x + b' \text{ Cos } y + b'' \text{ Cos } z; \quad \text{Cos } y = a' \text{ Cos } x + b' \text{ Cos } y + c' \text{ Cos } z;$$

$$\text{Cos } z = c \text{ Cos } x + c' \text{ Cos } y + c'' \text{ Cos } z; \quad \text{Cos } z = a'' \text{ Cos } x + b'' \text{ Cos } y + c'' \text{ Cos } z;$$

combinando cada duas equações da mesma linha horisontal, acharemos

$$0 = (a' - b) \operatorname{Cos} y + (a'' - c) \operatorname{Cos} z;$$

$$0 = (b - a') \operatorname{Cos} x + (b'' - c') \operatorname{Cos} z;$$

$$0 = (c - a'') \operatorname{Cos} x + (c' - b'') \operatorname{Cos} y;$$

donde

$$\operatorname{Cos} x : \operatorname{Cos} y : \operatorname{Cos} z : : b'' - c' : c - a'' : a' - b;$$

ora

$$\begin{aligned} (b'' - c')^2 + (c - a'')^2 + (a' - b)^2 &= 1 - a^2 + 1 - b'^2 + 1 - c''^2 - 2(b''c' + ca'' + a'b) = 3 - a^2 - b'^2 - c''^2 \\ + 2(b'c'' - b''c' + c''a - ca'' + ab' - a'b) - 2(b'c'' + c''a + ab') &= 3 - a^2 - b'^2 - c''^2 + 2(a + b' + c'') \\ - 2(b'c'' + c''a + ab') &= 4 - (a + b' + c'' - 1)^2; \end{aligned}$$

por conseguinte

$$\operatorname{Cos} x = \frac{b'' - c'}{\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2}};$$

$$\operatorname{Cos} y = \frac{c - a''}{\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2}};$$

$$\operatorname{Cos} z = \frac{a' - b}{\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2}}.$$

E se recorrermos ás equações (80), teremos  $a + b' + c'' = 2 \operatorname{Cos} \omega + 1$ : logo

$$\pm \sqrt{4 - (a + b' + c'' - 1)^2} = 2 \operatorname{Sen} \omega = \pm \sqrt{(b'' - c')^2 + (c - a'')^2 + (a' - b)^2}.$$

6.ª Combinação.

3.º *Systema expresso pelo 2.º*

Nas formulas (84) substituindo os valores de  $b''$ ,  $c'$ ,  $c$ ,  $a''$ ,  $a'$ ,  $b$ , da 1.ª Combinação, acharemos

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } x &= \frac{\text{Sen } \theta (\text{Cos } \psi + \text{Cos } \varphi)}{2 \text{ Sen } \omega} \\ \text{Cos } y &= \frac{\text{Sen } \theta (\text{Sen } \psi - \text{Sen } \varphi)}{2 \text{ Sen } \omega} \\ \text{Cos } z &= \frac{(\text{Cos } \theta + 1) \text{ Sen } (\psi + \varphi)}{2 \text{ Sen } \omega} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (86).$$

E como  $2 \text{ Cos } \omega = a + b' + c'' - 1$ , teremos pelas mesmas formulas da 1.ª Combinação

$$2 \text{ Cos } \omega = (\text{Cos } \theta + 1) \text{ Cos } (\psi + \varphi) + \text{Cos } \theta - 1;$$

logo

$$4 \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} \omega = (\text{Cos } \theta + 1) \text{ Cos } (\psi + \varphi) + \text{Cos } \theta + 1 = (\text{Cos } \theta + 1) (\text{Cos } (\psi + \varphi) + 1) = 4 \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi),$$

donde

$$\text{Cos } \frac{1}{2} \omega = \pm \text{Cos } \frac{1}{2} \theta \text{ Cos } \frac{1}{2} (\psi + \varphi) \dots\dots\dots (87).$$

Devendo sempre ser  $\frac{1}{2} \omega < 180^\circ$ , a equação precedente, attento o duplo signal do segundo membro, dará só para  $\frac{1}{2} \omega$  dous valores  $\frac{1}{2} \omega'$ ,  $\frac{1}{2} \omega''$  ligados pela equação

$$\frac{1}{2} \omega' + \frac{1}{2} \omega'' = 180^\circ, \text{ ou } \omega' + \omega'' = 360^\circ.$$

Ambos os valores  $\omega'$ ,  $\omega''$  são admissiveis, e representam a mesma rotação referida aos dous eixos oppostos  $OC$ ,  $OC'$ , porque successivamente substituidos nas formulas (86), dão para  $\text{Cos } x$ ,  $\text{Cos } y$ ,  $\text{Cos } z$  signaes contrarios.

O valor (87) substituido nas formulas (86) dá

$$\text{Cos } x = \frac{\text{Sen } \theta (\text{Cos } \psi + \text{Cos } \varphi)}{\pm 4 \text{ Cos} \frac{1}{2} \theta \text{ Cos} \frac{1}{2} (\psi + \varphi) \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi)}};$$

$$\text{Cos } y = \frac{\text{Sen } \theta (\text{Sen } \psi - \text{Sen } \varphi)}{\pm 4 \text{ Cos} \frac{1}{2} \theta \text{ Cos} \frac{1}{2} (\psi + \varphi) \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi)}};$$

$$\text{Cos } z = \frac{(\text{Cos } \theta + 1) \text{ Sen } (\psi + \varphi)}{\pm 4 \text{ Cos} \frac{1}{2} \theta \text{ Cos} \frac{1}{2} (\psi + \varphi) \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi)}};$$

equações que se transformão facilmente nas seguintes :

$$\text{Cos } x = \frac{\text{Sen } \frac{1}{2} \theta \text{ Cos } \frac{1}{2} (\psi - \varphi)}{\pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi - \varphi)}};$$

$$\text{Cos } y = \frac{\text{Sen } \frac{1}{2} \theta \text{ Sen } \frac{1}{2} (\psi - \varphi)}{\pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi - \varphi)}};$$

$$\text{Cos } z = \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} \theta \text{ Sen } \frac{1}{2} (\psi + \varphi)}{\pm \sqrt{1 - \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \theta \text{ Cos}^2 \frac{1}{2} (\psi + \varphi)}};$$

formulas que, reunidas á equação

$$\text{Cos } \frac{1}{2} \omega, = \pm \text{Cos } \frac{1}{2} \theta \text{ Cos } \frac{1}{2} (\psi + \varphi),$$

dão os angulos do 3.º systema expressos nos do 2.º

=====

### III.

*Posição do eixo central dos momentos para qualquer configuração.*

=====

101. Para determinar a situação do eixo central dos momentos em qualquer configuração, imaginemos que se toma um plano qualquer perpendicular á direcção da resultante  $R$ ; que neste se tração dous eixos rectangulares relativos ás coordenadas  $x, y$ ; e que se toma um terceiro eixo no sentido de  $R$ . Para termos as coordenadas  $x, y$ , do ponto de encontro do eixo central com aquelle plano, decomponha-

mos as forças do systema parallelamente aos tres eixos; cada força  $X$  (Fig. 17) equivale á sua projecção no plano  $xy$ , e a um binario  $(z, X)$ , cujo braço é a coordenada  $z$  do ponto de applicação de  $X$ ; semelhantemente se transforma a força  $Y$ ; ora os binarios  $(z, X)$ ,  $(z, Y)$  cujas forças são parallelas aos eixos dos  $x$ , e dos  $y$  equivalem a dous binarios, cujas forças são em grandeza, cada uma dellas  $z$ , e os braços, existentes no plano  $xy$ , são as projecções de  $X$ , e  $Y$ ; cada força  $P$  do systema equivale pois a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \text{ applicada ao ponto } z=0, \quad x, y; \\ z \dots\dots\dots z=0, \quad x, y; \\ -z \dots\dots\dots z=0, \quad x+X, y; \\ z \dots\dots\dots z=0, \quad x, y; \\ -z \dots\dots\dots z=0, \quad x, y+Y; \end{aligned}$$

e ás forças  $X, Y$  situadas no plano  $xy$ . Todas as forças analogas a estas ultimas dão um binario situado no mesmo plano, e todas as outras forças, que são parallelas ao eixo dos  $z$ , terão uma resultante que coincide em posição com o eixo central dos momentos. Teremos pois

$$\left. \begin{aligned} x, \Sigma \mathcal{Z} &= \Sigma x \mathcal{Z} - \Sigma z X \\ y, \Sigma \mathcal{Z} &= \Sigma y \mathcal{Z} - \Sigma z Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (88)$$

ou fazendo

$$\begin{aligned} \Sigma z X &= E''; \quad \Sigma x \mathcal{Z} = G; \quad \Sigma y \mathcal{Z} = G'; \quad \Sigma z Y = F'' \dots\dots\dots (89) \\ R_x &= G - E''; \\ R_y &= G' - F''; \end{aligned}$$

devendo-se advertir que  $G, G', E'', F''$  não mudão deslocando-se a origem das coordenadas parallelamente a  $R$ , comtanto que os eixos dos  $x$ , e  $y$  se conservem parallellos á direcção primitiva.

102. Suppondo agora que houve uma rotação qualquer, sobre  $R$  como directriz, e, relativamente á configuração inicial, chamando  $\gamma$  o angulo que cada força  $P$  do systema fazia com  $R$ ;  $\varphi$  o angulo que a sua projecção no plano  $xy$  formava com o eixo dos  $x$ ; as equações (88) mudar-se-hão em

$$Rx_1 = \Sigma Px \cos \gamma - \Sigma Pz \sin \gamma \cos (\varphi + \iota);$$

$$Ry_1 = \Sigma Py \cos \gamma - \Sigma Pz \sin \gamma \sin (\varphi + \iota);$$

isto é, desenvolvendo  $\cos (\varphi + \iota)$ ,  $\sin (\varphi + \iota)$

$$Rx_1 = G - \cos \iota \cdot E'' + \sin \iota \cdot F'';$$

$$Ry_1 = G' - \cos \iota \cdot F'' - \sin \iota \cdot E'';$$

transpondo  $G$ ,  $G'$ , quadrando, e sommando as equações resultantes obteremos

$$(Rx_1 - G)^2 + (Ry_1 - G')^2 = E''^2 + F''^2 \dots \dots \dots (90)$$

equação que dá todos os pontos d'encontro do eixo central em um plano perpendicular a  $R$ , para todas as configurações, que tem  $R$  por directriz fixa.

103. Vê-se por tanto que gyrando o systema sobre a directriz  $R$ , o eixo central dos momentos traça no plano perpendicular á resultante um circulo, que tem como raio

$$\frac{\sqrt{E''^2 + F''^2}}{R}, \text{ e cujo centro tem as coordenadas } \frac{G}{R}, \frac{G'}{R},$$

que são (§ 87) as coordenadas do centro do systema. Chamaremos a este circulo *directriz dos eixos centraes dos momentos*.

104. Do paragrapho precedente se conclue, que gyrando o systema sobre a sua resultante o eixo central dos momentos descreve a superficie de um cylindro recto, cujo eixo passa constantemente pelo centro do systema, qualquer que seja a direcção de  $R$ . Esta ultima propriedade pode considerar-se como a generalisação do principio do centro das forças parallelas, e do principio analogo que demonstrámos (§ 34) para as configurações em um plano.

105. Para construir em qualquer configuração o eixo central dos momentos, poderíamos reflectir que tomando (fig. 17)  $CR$  para grandeza e posição da respectiva resultante, sendo  $C$  o centro do systema, e os eixos rectangulares  $CX$ ,  $CY$  tomados no plano perpendicular a  $CR$ , cada força  $P$  do systema dá a respectiva componente parallelamente a  $CR$ , as projecções  $X$ ,  $Y$  no plano  $xy$ , e os binarios  $(X, -X, z)$ ,  $(Y, -Y, z)$ , ou  $zX, -zY$  parallelamente aos planos  $zx, zy$ ; logo  $\sqrt{E''^2 + F''^2} = \sqrt{\varepsilon^2 zX + \varepsilon^2 zY}$

é a grandeza do binario resultante de todos os binarios parallelamente a esses planos; para ter a posição do eixo central dos momentos deve-se pois deslocar  $R$  parallelamente ao plano desse binario resultante, e no sentido convenientemente  $CC'$  até que a distancia  $CC' = \rho$  seja tal que tenhamos  $R_\rho = \sqrt{E''^2 + F''^2}$ .

106. Se suppozermos porêm que o systema de forças dado gyra simultaneamente com os eixos  $CX$ ,  $CY$  sobre  $CR$ ,  $\varepsilon zX$ , e  $\varepsilon - zY$  não mudão, isto é, o binario resultante  $\sqrt{\varepsilon^2 zX + \varepsilon^2 zY}$  gyra conjunctamente sobre  $CR$ , e por consequente  $CC'$ , de grandeza invariavel, gyra no plano  $xy$  em torno de  $C$ , o que nos conduz tambem ás propriedades demonstradas (§§ 103, 104).

107. Supponhamos agora que tomando ainda por directrizes  $CX$ ,  $CY$ ,  $CZ$ , o systema dado gyra de qualquer maneira no espaço mudando  $CR$  de direcção. Durante a rotação conservão-se constantes  $X$ ,  $X'$ , etc.  $Y$ ,  $Y'$ , etc. mas varião continuamente  $z$ ,  $z'$ , etc. o que faz variar constantemente a grandeza  $\rho = \frac{\sqrt{E''^2 + F''^2}}{R}$  do raio do circulo directriz dos eixos centraes. Tractaremos por tanto de exprimir o valor de  $\rho$  para qualquer direcção de  $R$ .

Na configuração inicial é

$$E'' = \varepsilon zX; F'' = \varepsilon zY;$$

em outra configuração em que  $R$  faça com os eixos cor-

respondentes á configuração primitiva tres angulos cujos cosenos sejam  $c, c', c''$ , e em que, chamando  $z$  a distancia perpendicular do centro de qualquer força  $P$  ao plano directriz  $xy$ , teremos

$$z = cx + c'y + c''z,$$

será

$$\left. \begin{aligned} E' &= \Sigma zX = c \Sigma xX + c' \Sigma yX + c'' \Sigma zX \\ F' &= \Sigma zY = c \Sigma xY + c' \Sigma yY + c'' \Sigma zY \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

Fazendo

$$\Sigma xX = E; \Sigma yX = E'; \Sigma xY = F; \Sigma yY = F' \dots\dots (92)$$

teremos quadrando as equações (91), e sommando os resultados

$$\left. \begin{aligned} E'^2 + F'^2 &= c^2 (E^2 + F^2) + c'^2 (E'^2 + F'^2) + c''^2 (E''^2 + F''^2) \\ &+ 2cc' (EE' + FF') + 2cc'' (EE'' + FF'') + 2c'c'' (E'E'' + F'F'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (93)$$

ou suppondo

$$E^2 + F^2 = c; E'^2 + F'^2 = f; E''^2 + F''^2 = g; EE' + FF' = h; EE'' + FF'' = i; E'E'' + F'F'' = j \dots (94)$$

e designando por  $\rho$  o raio do circulo directriz dos eixos centraes correspondente á configuração, que agora se considera

$$R^2 \rho^2 = c^2 c + c'^2 f + c''^2 g + 2cc'h + 2cc''i + 2c'c''j \dots\dots\dots (95)$$

108. Se para a posição inicial dos eixos  $OX, OY$  designarmos por  $x, y, z$  as coordenadas do centro do grupo de componentes positivas paralelas a  $OX$ , e cuja somma seja representada por  $X$ ; se forem semelhantemente  $x', y', z'$  as coordenadas do centro do grupo de forças negativas correspondentes; se por um modo analogo  $x'', y'', z''$  fo-

rem as coordenadas dos centros dos dous grupos parallellos a  $OY$ , e  $Y_1$  designar a somma do grupo de forças positivas, ver-se-ha que os coefficients constantes da equação precedente tem os seguintes valores :

$$\left. \begin{aligned}
 e &= E^2 + F^2 = \Sigma^2 xX + \Sigma^2 xY = (x-x')^2 X_1^2 + (x-x')^2 Y_1^2 \\
 f &= E'^2 + F'^2 = \Sigma^2 yX + \Sigma^2 yY = (y-y')^2 X_1^2 + (y-y')^2 Y_1^2 \\
 g &= E''^2 + F''^2 = \Sigma^2 zX + \Sigma^2 zY = (z-z')^2 X_1^2 + (z-z')^2 Y_1^2 \\
 h &= EE' + FF' = \Sigma xX \Sigma yX + \Sigma xY \Sigma yY = (x-x')(y-y') X_1^2 + (x-x')(y-y') Y_1^2 \\
 i &= EE'' + FF'' = \Sigma xX \Sigma zX + \Sigma xY \Sigma zY = (x-x')(z-z') X_1^2 + (x-x')(z-z') Y_1^2 \\
 j &= E'E'' + F'F'' = \Sigma yX \Sigma zX + \Sigma yY \Sigma zY = (y-y')(z-z') X_1^2 + (y-y')(z-z') Y_1^2
 \end{aligned} \right\} \dots (96).$$

Estas equações mostram, que se a configuração de que se partio para estabelecer a equação (95) for uma daquellas em que a resultante  $R$  é perpendicular aos braços  $m$ ,  $m'$  dos dous binarios resultantes, teremos

$$g = i = j = 0,$$

e por conseguinte a equação (95) reduzir-se-ha a

$$R^2 r^2 = c^2 e + c'^2 f + 2 cc' h. \dots \dots \dots (97).$$

109. A simplificação que acabamos de effectuar pôde conseguir-se, sem que seja necessario tomar uma configuração inicial em que a resultante seja perpendicular aos braços dos binarios resultantes. Uma configuração qualquer de que se parta dará a equação (97), uma vez que refiramos convenientemente a dous diversos systemas d'eixos rectangulares a decomposição das forças do systema dado, e as coordenadas dos seus centros. Com effeito supponhamos que em uma configuração qualquer se tomárão tres eixos rectangulares  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$ , o ultimo dos quaes seja paralelo á respectiva direcção de  $R$ ; refira-se a estes eixos a decomposição das forças  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$  etc. do systema; adopte-se outro systema d'eixos rectangulares  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , o ultimo dos

quaes seja perpendicular aos braços dos dous binarios resultantes, e a esses reframos as coordenadas dos centros das forças  $P$ ,  $P'$  etc.; por meio destes dous systemas d'eixos calculem-se as funcções  $\Sigma xX$ ,  $\Sigma xY$ ,  $\Sigma yX$ ,  $\Sigma yY$  etc., e estabeleça-se hypotheticamente a equação (97); isto supposto, imagine-se que o systema de forças dado gyra com as directrizes  $OS'$ ,  $OX'$ ,  $OY'$  até que estas venhão a coincidir com  $OS$ ,  $OX$ ,  $OY$ ; nesta configuração as coordenadas dos pontos d'applicação não mudárão, por serem referidas a eixos fixos, nem as componentes  $X$ ,  $Y$ ,  $X'$ ,  $Y'$ , etc. porque as forças do systema gyrárão com os eixos em relação aos quaes se fez a decomposição: logo as quantidades  $\Sigma xX$ ,  $\Sigma xY$ , etc. calculadas em relação aos dous systemas d'eixos tem o mesmo valor, que se fossem determinadas por um só systema d'eixos em uma configuração em que fosse  $R$  perpendicular aos braços dos binarios resultantes; por conseguinte é verdadeira a equação (97), calculadas as funcções  $\Sigma xX$ ,  $\Sigma xY$  etc. de modo que as coordenadas se refrirão a um systema d'eixos em que  $OS'$  seja perpendicular aos braços dos binarios resultantes, e as componentes das forças a outro systema cujo eixo  $OS'$  seja paralelo a  $R$ ; os cosenos  $c$ ,  $c'$ , correspondem aos angulos que  $R$  faz com os primeiros eixos  $OX$ ,  $OY$ , e  $\rho$  é o raio do circulo directriz dos eixos centraes para a direcção  $OS'$  de  $R$ .

110. Chamaremos d'ora em diante ás nove funcções

$$\Sigma xX, \Sigma xY, \Sigma xZ, \Sigma yX, \Sigma yY, \Sigma yZ, \Sigma zX, \Sigma zY, \Sigma zZ$$

*parametros de rotação* de um systema de forças gyrantes: essas funcções são designadas respectivamente por

$$E, F, G, E', F', G', E'', F'', G''.$$

Tomando-se o eixo dos  $z$  parallelamente á resultante é

$$G = \Sigma xZ = 'xR; G' = \Sigma yZ = 'yR; G'' = \Sigma zZ = 'zR$$

sendo  $'x$ ,  $'y$ ,  $'z$  as coordenadas do centro do systema. E adoptando esse ponto para origem será

$$G = G' = G'' = 0.$$

Quando os parametros se determinão para uma configuração em que  $R$  é perpendicular a  $m$ , e  $m'$ , teremos tambem

$$E'' = F'' = 0, \text{ e por tanto } g = i = j = 0.$$

Estes valores subsistem para qualquer configuração uma vez que os parametros se determinem por dous systemas d'eixos rectangulares, como explicámos (§ 109).

III. Chamando  $A'$ ,  $B'$  os semidiametros da ellipse de redução correspondentes aos binarios resultantes em relação aos eixos iniciaes directrizes, que derão a equação (97), e sendo  $\alpha$ ,  $\alpha'$  os angulos que esses semidiametros fazem respectivamente com o eixo fixo  $OX$ , teremos pelas formulas (39, 40)

$$c = A'^2 \text{Cos}^2 \alpha + B'^2 \text{Cos}^2 \alpha'; f = A'^2 \text{Sen}^2 \alpha + B'^2 \text{Sen}^2 \alpha'; h = A'^2 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha + B'^2 \text{Sen} \alpha' \text{Cos} \alpha';$$

e por conseguinte (97) transforma-se em

$$R_f^2 = c^2 (A'^2 \text{Cos}^2 \alpha + B'^2 \text{Cos}^2 \alpha') + c'^2 (A'^2 \text{Sen}^2 \alpha + B'^2 \text{Sen}^2 \alpha') + 2cc' (A'^2 \text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha + B'^2 \text{Sen} \alpha' \text{Cos} \alpha') \dots (98)$$

Esta equação simplifica-se consideravelmente, se o eixo  $OX$  se tiver tomado paralelo a qualquer dos semieixos da ellipse de redução. Suppondo pois  $OX$  paralelo a  $A$ , (98), em virtude das formulas (41), reduz-se a

$$R_f^2 = c^2 A^2 + c'^2 B^2 \dots \dots \dots (99).$$

E' pois necessario para chegarmos a esta fórmula, que os parametros de rotação se determinem relativamente a uma configuração em que  $R$  seja perpendicular á ellipse de redução, o eixo dos  $z$  paralelo a  $R$ , e os eixos dos  $x$ ,  $y$  na direcção dos semieixos  $A$ ,  $B$  da ellipse de redução. Podem tambem os ditos parametros conduzir á equação (99), uma vez que sejam calculados, para qualquer configuração, em relação a dous systemas d'eixos rectangulares como dissemos (§ 109), sendo no systema que dá a decomposição das forças o eixo dos  $z$  paralelo a  $R$ , e no systema que dá as coordenadas dos pontos d'applicação das forças, os eixos dos  $x$ , e dos  $y$  paralelos aos eixos da ellipse de redução. Deve-se advertir porém que adoptando o systema unico, ou os dous systemas de eixos coordenados, que de-

signámos, podem estes transportar-se parallelamente para qualquer origem differente do centro do systema, visto que esse deslocamento apenas faria mudar a grandeza dos parametros  $G$ ,  $G'$ ,  $G''$  os quaes não entrão nas equações que temos deduzido para determinar  $\rho$ .

112. Tendo chegado a obter a equação (99), imagine-se que para cada direcção de  $R$  se toma no sentido desta linha, e a partir do centro do systema, uma grandeza

$$r = \frac{R^2}{\rho};$$

e suppondo que  $R$  toma todas as direcções no espaço, teremos, chamando  $x$ ,  $y$  as coordenadas do extremo de  $r$  em relação aos eixos parallellos aos da ellipse de redução

$$c = \frac{x}{r} = \frac{\rho x}{R^2}; \quad c' = \frac{y}{r} = \frac{\rho y}{R^2};$$

equações que mudão (99) em

$$R^6 = A^2 x^2 + B^2 y^2 \dots \dots \dots (100).$$

Esta equação mostra, que o logar de todas as posições do extremo do raio vector  $r$ , para todas as configurações, é em geral a superficie de um cylindro recto, cuja base elliptica tem os eixos na direcção dos eixos da ellipse de redução do systema dado: o eixo deste cylindro é perpendicular ao plano da dita ellipse, e por conseguinte perpendicular aos braços  $m$ ,  $m'$  de quaesquer dous binarios resultantes das componentes das forças  $P$ ,  $P'$  etc., parallelas ao plano perpendicular a  $R$  em uma configuração qualquer. Os semieixos da base do cylindro serão dados pelas equações

$$A_i = \frac{R^3}{A}; \quad B_i = \frac{R^3}{B} \dots \dots \dots (101)$$

donde se conclue que a ellipse de redução, e a base do cylindro, que dá os raios  $\rho$  dos circulos directrizes dos eixos centraes, são semelhantes e concentricas, mas situadas de modo que os eixos homologos são perpendiculares.

Os raios dos circulos directrizes serão pois dados, em

virtude da equação  $\rho = \frac{R^2}{r}$ , pelos raios vectores  $r$  do cylindro recto cuja equação é

$$1 = \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} \dots \dots \dots (102).$$

Chamaremos á superficie representada por esta equação *cylindro de redução* dos eixos centraes; os tres eixos coordenados  $OX, OY, OZ$ , que dão esta equação, terão pela sua ordem a designação de primeiro, segundo, e terceiro eixos principaes; e entre os diversos systems de dous binarios resultantes, que correspondem ás diversas posições dos eixos de decomposição, chamaremos *principaes* aquelles cujos braços coincidem respectivamente com o primeiro, e segundo eixo principal.

113. Se representarmos por  $\lambda, \mu, \nu$  os tres angulos, que o terceiro eixo principal faz com tres eixos rectangulares  $OX, OY, OZ$  quaesquer, dos quaes o dos  $z$  seja parallello á direcção de  $R$  em nma configuração qualquer, e suppozermos que para o sentido adoptado daquelle eixo principal é  $< 180^\circ$  a rotação directa necessaria para se passar do braço  $m$ , daquelle dos dous binarios resultantes a que corresponde a força  $X_1$ , para o outro braço  $m'$ , teremos

$$\text{Cos } \lambda = \frac{\text{Cos } mY \text{ Cos } m'Z - \text{Cos } mZ \text{ Cos } m'Y}{\text{Sen } mm'}$$

$$\text{Cos } \mu = \frac{\text{Cos } mZ \text{ Cos } m'X - \text{Cos } mX \text{ Cos } m'Z}{\text{Sen } mm'}$$

$$\text{Cos } \nu = \frac{\text{Cos } mX \text{ Cos } m'Y - \text{Cos } mY \text{ Cos } m'X}{\text{Sen } mm'}$$

e como pela formula (66) é

$$A^2 B'^2 \text{ Sen}^2 mm' = E^2 F'^2 + E'^2 F''^2 + E''^2 F^2 + E'^2 F''^2 + E''^2 F^2 - 2 EE'FF' - 2 EE''FF'' - 2 E'E''F'F''$$

designando por  $D^2$  o segundo membro. desta equação, acharemos facilmente por meio das formulas (65)

$$\text{Cos } \lambda = \frac{E'F'' - E''F'}{D};$$

$$\text{Cos } \mu = \frac{E'F - EF''}{D};$$

$$\text{Cos } \nu = \frac{EF' - E'F}{D}.$$

Estas equações dão tambem o plano da ellipse de redução, pois que esta é perpendicular ao terceiro eixo principal. Em quanto á direcção dos outros dous eixos principaes seria facil fixal-a directamente, uma vez que elles devem ser respectivamente parallelos aos eixos da ellipse de redução, cujos diametros conjugados tem as grandezas e direcções dadas pelas equações (64, 65). Conhecidas porém essas direcções, desde logo ficaria fixado o terceiro eixo principal, que lhes é perpendicular.

114. A superficie do cylindro de redução define-se tomando na direcção correspondente a cada posição de  $R$ , e a partir do centro do systema, uma grandeza  $r = \frac{R^2}{\rho}$ ; e

sendo por tanto esta superficie independente do systema de coordenadas, que serviu para calcular os parametros de rotação, segue-se que adoptando o systema de coordenadas que nos deu a equação (95), e designando por  $x, y, z$  as coordenadas do extremo do raio vector  $r$  referidas a esse systema, teremos

$$c = \frac{x}{r} = \frac{\rho x}{R^2}; \quad c' = \frac{y}{r} = \frac{\rho y}{R^2}; \quad c'' = \frac{z}{r} = \frac{\rho z}{R^2};$$

e por tanto a equação (95) transforma-se em

$$R^6 = ex^2 + fy^2 + gz^2 + 2hxy + 2ixz + 2jyz \dots \dots (103).$$

Esta equação representa pois o cylindro de redução referido a um systema qualquer de coordenadas rectangulares, em que o eixo dos  $z$  seja paralelo á direcção de  $R$  na configuração que serviu para o calculo dos parametros, podendo a origem das coordenadas collocar-se em um ponto qual-

quer do espaço, o que não altera a grandéza dos parámetros, que entrão em (103).

115. Determinados os parámetros para um systema de eixos como acabamos de designar, e para uma configuração qualquer, teremos conhecidas as quantidades  $e, f, g, h, i, j$  que entrão na equação (103) do cylindro de redução: fazendo pois as transformações de coordenadas, que se empregão na Geometria analytica para effectuar o desapparecimento dos tres rectangulos  $xy, xz, yz$ , este processo deverá eliminar necessariamente um dos tres quadradros, que será o relativo ao eixo dos  $z$ , e chegaremos finalmente á equação do cylindro referido aos tres eixos principaes.

116. Em todas as configurações em que  $R$  coincidir com o terceiro eixo principal, ou com o seu prolongamento será  $r = \infty, \rho = 0$ , e por conseguinte será  $R$  eixo central dos momentos; e é facil de reconhecer, que  $R$  deixará de o ser uma vez que tenha uma direcção differente do terceiro eixo principal.

117. Chamaremos *configurações principaes* aquellas em que  $R$  coincide com qualquer dos eixos principaes, designando cada uma dellas pelo numero do eixo correspondente. Nas duas primeiras configurações principaes teremos

$$\rho' = \frac{R^2}{A_1} = \frac{A}{R}; \rho'' = \frac{R^2}{B_1} = \frac{B}{R}.$$

E sendo  $\alpha, \beta$  os angulos, que em uma configuração qualquer faz  $R$  com os dous primeiros eixos principaes a equação (99) dá

$$\rho^2 = \rho'^2 \text{Cos}^2 \alpha + \rho''^2 \text{Cos}^2 \beta \dots \dots \dots (104)$$

isto é, os circulos directrizes das duas primeiras configurações principaes determinão os circulos directrizes de todas as outras configurações. A equação (104) mostra que as configurações, a que correspondem posições de  $R$  directamente contrarias, tem circulos directrizes iguaes, e coincidentes. Se para qualquer configuração tomarmos sobre  $R$  as grandezas  $\rho', \rho''$ , será  $\rho$  igual á resultante de duas torças representadas pelas projecções de  $\rho', \rho''$  sobre os eixos principaes respectivos. O maximo valor de  $\rho$  corre-

sponderá a uma das duas primeiras configurações principaes, isto é, será  $\rho = \frac{A}{R}$ , ou  $= \frac{B}{R}$ , conforme  $A \gtrless B$ .

118. Se for  $A = B$ , isto é, se se verificarem as condições (67), a base do cylindro de redução será um circulo. Designando por  $\gamma$  o angulo que em qualquer configuração faz  $R$  com o terceiro eixo principal, será nesse caso  $\rho' = \rho''$ , e a equação (104) reduz-se a

$$\rho^2 = \rho'^2 (1 - \text{Cos}^2 \gamma), \text{ donde } \rho = \rho' \text{ Sen } \gamma \dots \dots (105)$$

equação que nos indica, que todas as configurações, em que  $R$  seja igualmente inclinada em relação ao terceiro eixo principal, terão circulos directrizes iguaes, e o mesmo acontecerá para as posições de  $R$  que fação com aquelle eixo angulos supplementares.

119. Até aqui temos supposto, que o systema de forças gyrantes pertencia á terceira classe (§ 98); mas se os dous binarios gyrantes se reduzirem a um só, ou porque os braços  $m, m'$  sejam paralelos, ou porque algum delles, ou alguma das forças  $X_1, Y_1$  sejam zero, em todos estes casos, suppondo que o binario  $(m, X_1)$  subsiste, ver-se-ha que tomando o eixo dos  $x$  paralelo a  $m$ , na equação (97) teremos

$$f = h = 0,$$

por isso que será

$$y - y' = 0, \quad y_1 - y'_1 = 0, \quad \text{ou}$$

$$y - y' = 0, \quad Y_1 = 0;$$

e a equação (102) reduz-se a

$$1 = \frac{x^2}{A_1^2};$$

o cylindro de redução converte-se por tanto em dous planos perpendiculares ao braço  $m$ , ou aos dous braços  $m, m'$ , se ambos subsistirem. A distancia  $A_1$  de cada um dos planos ao fóco dos raios vectores  $r$  será dada pela equação

$$A_i = \frac{R^3}{\sqrt{\Sigma^2 xX + \Sigma^2 xY}} \dots\dots\dots (106)$$

suppondo ainda que o eixo dos  $x$  se tomou paralelo aos braços dos binarios resultantes. Os dous planos nunca coincidem, pois que  $x, x',$  etc.  $X, X',$  etc.  $Y, Y',$  etc. nunca são infinitos. Se representarmos por  $m$  o braço do binario a que se reduzem os dous binarios resultantes, e por  $X$  cada uma das forças correspondentes, teremos

$$\Sigma^2 xX + \Sigma^2 xY = (m^2 X_1^2 + m'^2 Y_1^2) \text{Cos}^2 mX = m^2 X^2,$$

o que muda (106) em

$$A_i = \frac{R^3}{mX}.$$

120. A equação (104) no caso presente em que  $\rho'' = 0$ , dá

$$\rho^2 = \rho'^2 \text{Cos}^2 \alpha, \text{ ou } \rho = \rho' \text{Cos } \alpha: \dots\dots\dots (107)$$

e por conseguinte terão círculos directrizes iguaes todas as configurações, em que o braço do binario resultante fizer com  $R$  angulos iguaes, ou supplementos: vê-se tambem que  $R$  será eixo central dos momentos em todas as configurações, em que for  $R$  perpendicular ao braço do binario resultante.

121. Se finalmente tivermos um systema gyrante da primeira classe, em todas as configurações será  $R$  eixo central dos momentos.

122. Do que fica exposto nos ultimos §§ se conclue

1.º Se para duas configurações, cujas resultantes não se são oppostas, nem coincidentes for  $\rho = 0$ , ou  $R$  eixo central, sel-o-ha em todas as configurações, em que  $R$  existir no plano determinado por aquellas duas posições, e o systema gyrante pertencerá á 1.ª, ou 2.ª classe.

2.º Se para tres configurações, cujas resultantes não se achão todas no mesmo plano, for  $\rho = 0$ , isto é, forem essas resultantes eixos centraes dos momentos, sel-o-ha  $R$  em todas as configurações, e o systema pertencerá á 1.ª classe.

123. A determinação do cylindro de redução, ou dos

dous planos parallelos de reduccão, poderia tambem effectuar-se pelo seguinte processo.

Imaginemos em uma configuração qualquer  $OS'$ ,  $OX'$ ,  $OY'$  systema d'eixos rectangulares directrices, em que o primeiro se conserva sempre paralelo á direcção de  $R$ ;  $Om$ ,  $Om'$  os braços dos binarios resultantes (fig. 18). A grandeza do raio  $\rho$  do circulo directriz correspondente á configuração, que se considera, será dada (§ 105) pela equação

$$R \rho = \sqrt{\Sigma^2 zX + \Sigma^2 zY} \dots \dots \dots (108)$$

e como é

$$\Sigma zX = mX, \text{ Cos } mZ'; \quad \Sigma zY = m'Y, \text{ Cos } m'Z';$$

teremos

$$R \rho = \sqrt{m^2 X_1^2 \text{ Cos}^2 mZ' + m'^2 Y_1^2 \text{ Cos}^2 m'Z'}$$

Façamos para qualquer configuração  $r = \frac{R^2}{\rho}$ , tomando  $r$  no sentido de  $R$  á partir de  $O$ , e determinemos o logar de todos os extremos do raio vector  $r$ , para o que referiremos essa superficie a tres eixos  $OZ$ ,  $OX$ ,  $OY$ , dos quaes o primeiro seja perpendicular ao plano de  $m$ ,  $m'$ , e  $OX$ ,  $OY$  situados nesse plano, e respectivamente perpendiculares a  $m$ , e  $m'$ . Suppondo  $OZ' = r$ , e baixando  $Z'M$  perpendicular ao plano  $XOY$ , teremos

$$\text{Cos}^2 mZ' = \text{Cos}^2 Z'OM \text{Cos}^2 mOM = \text{Cos}^2 Z'OM \text{Sen}^2 XOM;$$

$$\text{Cos}^2 m'Z' = \text{Cos}^2 Z'OM \text{Cos}^2 m'OM = \text{Cos}^2 Z'OM \text{Sen}^2 YOM;$$

e fazendo  $OM = r_1$ , acharemos

$$\rho = \frac{R^2}{r} = \frac{\sqrt{m^2 X_1^2 \cdot \frac{r_1^2}{r^2} \text{Sen}^2 XOM + m'^2 Y_1^2 \cdot \frac{r_1^2}{r^2} \text{Sen}^2 YOM}}{R},$$

donde

$$R^6 = m^2 X_1^2 r_1^2 \text{Sen}^2 XOM + m'^2 Y_1^2 r_1^2 \text{Sen}^2 YOM \dots \dots \dots (109)$$

As coordenadas  $x, y$  do extremo de  $r$ , chamando  $\omega$  o angulo  $XOY = mOm'$ , são dadas pelas equações

$$y^2 \text{ Sen}^2 \omega = r_i^2 \text{ Sen}^2 XOM;$$

$$x^2 \text{ Sen}^2 \omega = r_i^2 \text{ Sen}^2 YOM;$$

as quaes mudão (109) em

$$R^6 = m^2 X_i^2 \text{ Sen}^2 \omega \cdot y^2 + m'^2 Y_i^2 \text{ Sen}^2 \omega \cdot x^2,$$

equação que nos mostra, que para qualquer configuração  $\rho$  é dado pela formula  $\rho = \frac{R^2}{r}$ , em que  $r$  é o raio vector

de um cylindro elliptico recto, cuja base é parallela aos braços  $m, m'$  dos binarios resultantes, sendo diametros conjugados nessa base duas rectas respectivamente perpendiculares aos braços  $m, m'$ .

As grandezas dos semidiametros conjugados correspondentes a  $m, m'$  serão

$$OX = \frac{R^3}{m' Y_i \text{ Sen} \omega}; \quad OY = \frac{R^3}{m X_i \text{ Sen} \omega};$$

donde

$$OX : OY :: m \cdot X_i : m' \cdot Y_i :: A' : B'.$$

$Om, Om'$  só representarão as direcções de dous semidiametros conjugados, quando forem perpendiculares entre si.

124. Se os braços  $m, m'$  forem parallelos, ou se um dos binarios se aniquilar, chamando  $\phi$  o angulo que um dos braços, ou ambos elles fazem com  $OS'$ , teremos

$$\mp zY = m X_i \text{ Cos } \phi; \quad \mp zY = m' Y_i \text{ Cos } \phi;$$

logo a formula (108) reduz-se a

$$R \rho = \text{Cos } \phi \sqrt{m^2 X_i^2 + m'^2 Y_i^2},$$

e por conseguinte chamado  $\rho'$  o valor de  $\rho$  que corresponde a qualquer configuração, em que  $R$  coincide na direcção de  $m$ , ou de  $m'$ , teremos

$$r = r' \cos \varphi,$$

que é a formula achada (107).

Se tomarmos a contar da origem  $O$ , e parallelamente a  $m$ , ou  $m'$  duas rectas oppostas, e cada uma

$$r' = \frac{R^3}{\sqrt{m^2 X_1^2 + m'^2 Y_1^2}},$$

e se perpendicularmente á recta 2  $r'$  conduzirmos dous planos pelos seus extremos, suppondo um raio vector  $r$  que parte de  $O$ , terminando em um dos planos, e tendo a direcção da resultante correspondente a qualquer configuração, teremos

$$\cos \varphi = \frac{r'}{r},$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned} r &= \frac{\cos \varphi}{R} \sqrt{m^2 X_1^2 + m'^2 Y_1^2} = \\ &= \frac{r' \sqrt{m^2 X_1^2 + m'^2 Y_1^2}}{R r} = \frac{R^2}{r}, \end{aligned}$$

como tinhamos achado por outro modo.

125 Depois de conhecida a posição, e grandeza do circulo directriz em qualquer configuração, resta unicamente para sabermos collocar o eixo central dos momentos nessa configuração, determinar a direcção respectiva de  $\rho$ . Para isso adoptando o systema de eixos directrizes rectangulares  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$ , dos quaes o ultimo é parallello a

$R$ , determinaremos a grandeza do angulo  $\varphi$ , que para uma dada configuração faz  $r$  com o eixo  $OX'$ , exprimindo esse angulo por meio dos parametros correspondentes a uma posição inicial  $OXYZ$  dos eixos directrizes, e por meio dos angulos, que indicão a posição de  $OX'Y'Z'$  em relação a  $OXYZ$ .

Como suppondo que o systema de forças dado gyra

sobre a directriz  $OS'$ , e gyra simultaneamente com  $OX'$

no plano  $X'OY'$ , o angulo  $\dot{\varphi}$  é constante em quanto não variar a posição de  $OS'$ , e por conseguinte esse angulo dependerá só dos tres cosenos  $c, c', c''$  que fixão a posição de  $R$ , ou  $OS'$  em relação aos eixos  $OX, OY, OS$ .

Pelo que dissemos (§ 106), será facil de vêr, que chamando  $\dot{X}, \dot{X}',$  etc.,  $\dot{Y}, \dot{Y}',$  etc.  $\dot{z}, \dot{z}',$  etc. as componentes das forças dadas em relação ás directrizes  $OX', OY', OS'$ , e as coordenadas dos seus centros em relação ao eixo  $OS'$ , teremos

$$\text{Cos } \dot{\varphi} = \frac{-\Sigma \dot{z}\dot{X}}{\sqrt{\Sigma^2 \dot{z}\dot{X} + \Sigma^2 \dot{z}\dot{Y}}}; \text{ Sen } \dot{\varphi} = \frac{-\Sigma \dot{z}\dot{Y}}{\sqrt{\Sigma^2 \dot{z}\dot{X} + \Sigma^2 \dot{z}\dot{Y}}}.$$

E como na configuração inicial  $OXYZ$  as componentes das forças dadas, em relação á posição respectiva do systema directriz, tem a mesma grandeza, que em qualquer outra configuração, em relação aos respectivos eixos  $OX', OY', OS'$ , representando por  $X, X',$  etc.,  $Y, Y',$  etc. aquellas componentes, as formulas precedentes mudão-se em

$$\text{Cos } \dot{\varphi} = \frac{-\Sigma \dot{z}\dot{X}}{\sqrt{\Sigma^2 \dot{z}\dot{X} + \Sigma^2 \dot{z}\dot{Y}}}; \text{ Sen } \dot{\varphi} = \frac{-\Sigma \dot{z}\dot{Y}}{\sqrt{\Sigma^2 \dot{z}\dot{X} + \Sigma^2 \dot{z}\dot{Y}}} \dots (110).$$

E sendo  $x, y, z, x', y', z',$  etc. as coordenadas dos centros das forças em relação aos eixos  $OX, OY, OS$ , temos em geral

$$\dot{z} = cx + c'y + c''z,$$

logo

$$\Sigma \dot{z}\dot{X} = c \Sigma x\dot{X} + c' \Sigma y\dot{X} + c'' \Sigma z\dot{X}; \Sigma \dot{z}\dot{Y} = c \Sigma x\dot{Y} + c' \Sigma y\dot{Y} + c'' \Sigma z\dot{Y} \dots (111).$$

As equações (111) reduzirão  $\text{Cos } \dot{\varphi}, \text{ Sen } \dot{\varphi}$  a serem expressas pelos parametos iniciaes  $E, E', E'', F, F', F''$ , e pelos tres cosenos  $c, c', c''$ . As formulas que desse modo se obtem simplificar-se-hão consideravelmente, se adoptarmos um determinado systema de eixos directrizes, e partirmos de uma configuração inicial conveniente.

Com effeito se  $OZ$  coincidir com o terceiro eixo principal, será

$$\Sigma zX = \Sigma zY = 0 \dots\dots\dots (112)$$

supponhamos tambem que conservando  $OZ$  fixa na posição, que acabamos de indicar, se adoptão os eixos de decomposição  $OX, OY$  taes, que os dous binarios resultantes pertencendo ao systema directo, tenham os braços coincidentes respectivamente com o primeiro, e segundo eixos principaes, teremos, chamando  $\alpha, \alpha'$  os angulos que esses braços fazem com o eixo  $OX$

$$\Sigma xX = A \text{Cos } \alpha; \Sigma yX = A \text{Sen } \alpha; \Sigma xY = B \text{Cos } \alpha'; \Sigma yY = B \text{Sen } \alpha'.$$

Se, tomando agora  $OX, OY, OZ$  por directrizes, fizermos rotar o systema sobre  $OZ$  até que  $OX, OY$  coincidão respectivamente com o primeiro, e segundo eixos principaes, será

$$\alpha = 0; \alpha' = 90^\circ;$$

e por conseguinte

$$\Sigma xX = A; \Sigma yY = B; \Sigma yX = \Sigma xY = 0 \dots\dots\dots (113)$$

Adoptando pois os eixos directrizes, e a configuração inicial, que conduzem ás equações (112, 113), as fórmulas (110) reduzem-se a

$$\text{Cos } \dot{\varphi} = -cA : \sqrt{c^2 A^2 + c^2 B^2}; \text{Sen } \dot{\varphi} = -c'B : \sqrt{c^2 A^2 + c'^2 B^2},$$

donde

$$\text{tg } \dot{\varphi} = \frac{Bc'}{Ac},$$

a qual se muda (§ 100) em

$$\text{tg } \dot{\varphi} = - \frac{B}{A} \text{Cot } \psi \dots (114).$$

Se em vez de escolher a configuração inicial, que nos deu

a ultima equação, adoptassemos aquella que se obtém dessã outra, fazendo rotar directamente o systema 90° sobre o eixo OZ', teriamos

$$\alpha = -90^\circ; \alpha' = 0;$$

e por conseguinte deduziriamos semelhantemente

$$\text{Cos } \dot{\phi} = A'c : \sqrt{A'^2c'^2 + B'^2c'^2}; \text{ Sen } \dot{\phi} = -B'c : \sqrt{A'^2c'^2 + B'^2c'^2} \dots (115)$$

$$\text{tg } \dot{\phi} = \frac{B}{A} \text{tg } \psi \dots (116).$$

Supporemos em primeiro logar que se adoptárão os eixos directrices, e a configuração inicial que conduzem á equação (116).

Essa equação dá para cada valor de  $\psi$  um angulo  $\dot{\phi}$  do mesmo quadrante, e outro do quadrante opposto: cumpre-nos por tanto designar qual desses angulos deve ser escolhido, para o que as equações (115) nos darão o criterio sufficiente.

Como o angulo  $\dot{\phi}$  depende só da direcção de  $R$ , supporemos, para simplificar essa indagação, que o systema directriz se fez rotar sobre OZ' até que a directriz OX' se ache situada no plano OXY, e de maneira que seja XOX' do primeiro, ou segundo quadrante. Pelo modo que indicámos (§ 100) para a contagem do angulo  $\psi$ , é facil de vêr que suppondo X'OX do primeiro quadrante, e partindo da configuração em que  $\theta = 0$ , se fizermos rotar o systema directriz sobre OX' no sentido directo desde  $\theta = 0$ , até  $\theta = 180^\circ$ , será sempre XOX' =  $\psi$ , isto é,  $\psi$  do primeiro quadrante; mas continuando a rotação desde  $\theta = 180^\circ$ , até  $\theta = 360^\circ$ , será a linha opposta a OX' que deve determinar o angulo  $\psi$ , o qual por conseguinte é do tereceiro quadrante. Do mesmo modo suppondo XOX' do segundo quadrante, e partindo da configuração  $\theta = 0$ ,  $\psi$  será do segundo quadrante para qualquer rotação directa sobre OX' desde  $\theta = 0$  até  $\theta = 180^\circ$ , e do quarto quadrante desde  $\theta = 180^\circ$  até  $\theta = 360^\circ$ .

Em qualquer das rotações comprehendidas nos limites indicados conhecer-se-ha facilmente qual é o signal de ca-

da um dos cosenos  $c$ ,  $c'$ , e por conseguinte os signaes do  $\text{Cos } \dot{\varphi}$ ,  $\text{Sen } \dot{\varphi}$  (115), o que nos indicará o quadrante a que deve pertencer  $\dot{\varphi}$ . Attendendo pois ás diversas posições do systema directriz, construiremos o quadro seguinte

$OX'$	$\theta$	$\psi$	$c, c'$	$\dot{\varphi}$
1.º Qua- drante	$\left\{ \begin{array}{l} 0^\circ \text{ a } 180^\circ \dots\dots 1.^\circ \text{ Quadrante} \\ 180^\circ \text{ a } 360^\circ \dots\dots 3.^\circ \text{ Quadrante} \end{array} \right.$		$\dots\dots +, - \dots\dots$	$\dots\dots 3.^\circ \text{ Quadrante}$ $\dots\dots 1.^\circ \text{ Quadrante}$
2.º Qua- drante	$\left\{ \begin{array}{l} 0^\circ \text{ a } 180^\circ \dots\dots 2.^\circ \text{ Quadrante} \\ 180^\circ \text{ a } 360^\circ \dots\dots 4.^\circ \text{ Quadrante} \end{array} \right.$		$\dots\dots +, + \dots\dots$ $\dots\dots -, - \dots\dots$	$\dots\dots 4.^\circ \text{ Quadrante}$ $\dots\dots 2.^\circ \text{ Quadrante}$

do qual concluiremos geralmente que  $\varphi$ , e  $\psi$  são sempre de quadrantes oppostos. Com esta interpretação a equação (116) dá-nos de um modo definido o angulo  $\dot{\varphi}$ , que corresponde a qualquer grandeza de  $\psi$ , e por isso teremos determinado para cada posição da directriz  $OZ'$  o angulo que no plano  $X'OY'$  faz  $\rho$  com  $OX'$ , advertindo sempre que se tomárão para eixos directrizes  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$ , aquelles a que correspondem os dous binarios resultantes principaes do systema directo, e que na posição inicial  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  desses eixos o primeiro tinha a direcção do segundo eixo principal *positivo*, isto é, a direcção do braço do segundo binario resultante principal no sentido do centro do systema para o extremo desse braço a que está applicada a força positiva  $Y'$ .

Se na posição inicial dos eixos directrizes  $OX'$ ,  $OY'$  tivessem estes respectivamente as direcções do primeiro e segundo eixo principaes positivos, discutindo semelhantemente a equação correspondente (114), concluiríamos ser sempre  $\dot{\varphi}$  do quadrante seguinte ao de  $\psi$ .

Quando  $OZ'$  se achar na direcção *positiva*, ou *negativa* do terceiro eixo principal, isto é, na direcção  $OZ$  acima designada, ou na opposta, coincidem os dous planos  $OXY$ ,  $OX'Y'$ , e por conseguinte é  $\psi$  indeterminado, bem como  $\dot{\varphi}$ . Essa indeterminação analytica corresponde a ser então  $\rho = 0$ , isto é, a coincidir o eixo central dos momentos com o terceiro eixo principal.

Nos systemas de 2.ª classe, sendo  $B=0$ , é sempre  $\dot{\varphi} = 0$ , ou  $= 180^\circ$ .

## IV.

*Binarios resultantes minima; primeira determinação statica de um systema gyrate dotado de resultante em qualquer configuração.*

126. Um systema gyrate dotado de resultante é representado em qualquer configuração pela posição do seu eixo central, pela grandeza, e sentido da resultante  $R$ , e pelo binario resultante *minimum*, isto é, pelo binario resultante perpendicular a  $R$ . Este binario é evidentemente o mesmo que se acha, em qualquer configuração, projectando no plano perpendicular a  $R$  todas as forças dadas  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ , etc. Se em uma dada configuração designarmos por  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  etc. os angulos que cada uma das forças faz com um eixo  $OZ$  parallello a  $R$ ; por  $\phi$ ,  $\phi'$ ,  $\phi''$ , etc. os angulos, que as projecções das forças dadas n'um plano perpendicular a  $R$ , fazem com um eixo  $OX$  situado nesse plano; e por  $x$ ,  $y$ ,  $x'$ ,  $y'$ ,  $x''$ ,  $y''$ , etc. as coordenadas dos pontos d'applicação relativamente a  $OX$ , e a outro eixo  $OY$  situado no mesmo plano, sendo estes eixos perpendiculares entre si, acharemos que o binario resultante *minimum* para a configuração que considerámos é dado pela equação

$$M = \sum P \text{ Sen } \gamma (x \text{ Sen } \phi - y \text{ Cos } \phi);$$

e se o systema de forças gyrate 90° sobre  $R$ , no sentido directo, o binario resultante *minimum* respectivo será representado por

$$N = \Sigma P \operatorname{Sen} \gamma (x \operatorname{Cos} \varphi + y \operatorname{Sen} \varphi).$$

As duas equações precedentes podem ser substituídas por

$$\left. \begin{aligned} M &= \Sigma (xY - yX) \\ N &= \Sigma (xX + yY) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (117)$$

sendo  $X, X',$  etc.  $Y, Y',$  etc. as componentes das forças dadas, na primeira configuração, parallelamente aos eixos  $OX, OY,$  e  $x, y, x', y',$  etc. as coordenadas dos seus centros em relação aos mesmos eixos.

Supponhamos agora, que partindo aquelle systema dessa configuração inicial, os tres eixos rectangulares, considerados como directrizes, gyrão de qualquer modo em torno da origem, vindo a occupar a posição  $OX'Y'Z'$ : as componentes  $X, X',$  etc.  $Y, Y',$  etc. não mudarão, e chamando  $x_1, x'_1,$  etc.  $y_1, y'_1,$  etc. as coordenadas dos pontos d'applicação em relação ás directrizes, as equações (117) mudar-se-hão em

$$M' = \Sigma (x_1 Y - y_1 X);$$

$$N' = \Sigma (x_1 X + y_1 Y);$$

e como devemos ter em geral

$$x_1 = ax + a'y + a''z;$$

$$y_1 = bx + b'y + b''z;$$

acharemos pela substituição

$$M' = a \Sigma xY + a' \Sigma yY + a'' \Sigma zY - b \Sigma xX - b' \Sigma yX - b'' \Sigma zX;$$

$$N' = a \Sigma xX + a' \Sigma yX + a'' \Sigma zX + b \Sigma xY + b' \Sigma yY + b'' \Sigma zY;$$

isto é, em presença das designações (§ 110)

$$M' = aF + a'F' + a''F'' - bE - b'E' - b''E'';$$

$$N' = aE + a'E' + a''E'' + bF + b'F' + b''F''.$$

Se chamarmos  $K$  o maximo dos momentos resultantes  $mi$ .

nima correspondentes a todas as configurações que tem por plano directriz  $X'OY'$ , aquelle a que se referem as equações precedentes, deduzir-se-ha dessas equações

$$K^2 = M'^2 + N'^2 = (a^2 + b^2)(E^2 + F^2) + (a'^2 + b'^2)(E'^2 + F'^2) + (a''^2 + b''^2)(E''^2 + F''^2) \\ + 2(aa' + bb')(EE' + FF') + 2(aa'' + bb'')(EE'' + FF'') + 2(a'a'' + b'b'')(E'E'' + F'F'') \\ + 2(ab' - a'b)(EF' - E'F) + (a'b'' - a''b')(E'F'' - E''F') + (a''b - ab'')(E''F - E'F''),$$

isto é, todas as configurações em que a resultante  $R$  faz com os tres eixos fixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  tres angulos, cujos cosenos são  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ , terão um maximo binario resultante *minimum* dado pela equação

$$K^2 = (1 - c^2)(E^2 + F^2) + (1 - c'^2)(E'^2 + F'^2) + (1 - c''^2)(E''^2 + F''^2) \\ - 2cc'(EE' + FF') - 2cc''(EE'' + FF'') - 2c'c''(E'E'' + F'F'') \\ + 2c(E'F'' - E''F') + 2c'(E''F - E'F') + 2c''(EF' - E'F).$$

A equação precedente empregando as designações do (§ 107), e fazendo tambem

$$l = E'F'' - E''F'; \quad m = E''F - EF''; \quad n = EF' - E'F;$$

muda-se em

$$K^2 = (1 - c^2)c + (1 - c'^2)f + (1 - c''^2)g - 2cc'h - 2c'c''i - 2c'c''j + 2cl + 2c'm + 2c''n. \dots (113).$$

127. Para o calculo das constantes, que entrão nesta equação suppozemos que os eixos directrizes  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  coincidião com os eixos fixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  na configuração inicial, que servin para a determinação dos parametros de rotação. Se porêm na configuração inicial supposerinos feita a decomposição das forças em relação a outros eixos, sendo sempre o dos  $z$  paralelo a  $R$ , esses deverão considerar-se como directrizes, e os parametros serão calculados da maneira que indicámos (§ 109): a equação (113) subsiste do mesmo modo com esta interpretação, visto que podíamos suppor que os eixos directrizes, partindo da configuração inicial, vierão coincidir com os eixos fixos, e então os parametros de rotação adquirem a significação, que lhes demos para deduzir a equação (113).

Quando porém os parametros forem calculados por meio de dous systemas d'eixos rectangulares, os cosenos  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  são os dos angulos que  $R$  faz com os eixos fixos, e não dos angulos que  $R$  forma com as direcções iniciaes das directrizes. Generalizado deste modo o sentido em que se póde tomar a equação (118), será inutil para o futuro distinguir o caso em que os parametros de rotação se calcularem em relação a dous systemas d'eixos, e por conseguinte suppremos d'ora em diante, que os eixos directrizes coincidem com os eixos fixos na configuração inicial.

128. A equação (118) póde simplificar-se consideravelmente adoptando o conveniente systema de eixos directrizes, e partindo de uma determinada configuração inicial. Se suppozermos pois que nesta é a resultante  $R$  perpendicular aos braços dos dous binarios resultantes será, pelas formulas dos (§§ 107, 125)

$$g = i = j = l = m = 0,$$

e por conseguinte teremos

$$K^2 = (1 - c^2) c + (1 - c'^2) f - 2cc'h + 2c'n \dots \dots \dots (119).$$

Se suppozermos de mais, que na configuração inicial as directrizes  $OX'$ ,  $OY'$  se tomarão parallelas,  $OX'$  ao primeiro eixo principal, e  $OY'$  ao segundo, teremos (§ 111)

$$h = 0, \quad c = A^2, \quad f = B^2;$$

e como é em geral

$$\begin{aligned} n &= \Sigma xX \Sigma yY - \Sigma yX \Sigma xY = \\ &= A'B' (\text{Sen } B'X \text{Cos } A'X - \text{Cos } B'X \text{Sen } A'X) = \pm A'B' \text{Sen } \omega, \end{aligned}$$

chamando  $\omega$  o angulo dos dous semidiametros conjugados  $A'$ ,  $B'$ , adoptando o signal superior, ou inferior conforme os dous binarios resultantes constituirem, na configuração inicial, um systema directo, ou inverso; e como é  $A'B' \text{Sen } \omega = AB$ , a equação (119) nas hypotheses indicadas reduzir-se-ha a

$$K^2 = (1 - c^2) A^2 + (1 - c'^2) B^2 \pm 2c''AB \dots \dots \dots (120).$$

Para simplificar mais o enunciado das consequencias, que deduziremos da equação precedente, supporemos sempre que na configuração inicial em que  $OX'$ ,  $OY'$  tem as direcções designadas, os dous binarios resultantes são do systema directo. Se o contrario acontecesse, passando da configuração inicial para outra em que, conservando fixa  $OX'$ , as directrizes  $OY'$ ,  $OZ'$  tomassem direcções oppostas ás primitivas, nesta nova configuração os binarios resultantes serião do systema directo, e por tanto seria esta configuração, que deveriamos tomar por inicial. Com esta outra hypothese a equação,

$$K^2 = (1 - c^2) A^2 + (1 - c'^2) B^2 + 2 c'' AB, \text{ ou}$$

$$K^2 = c^2 B^2 + c'^2 A^2 + (A^2 + B^2) c''^2 + 2 c'' AB \dots \dots \dots (121)$$

dará com toda a generalidade o valor do maximo binario resultante *minimum*  $K$  para qualquer direcção de  $R$ , suppondo por em quanto, que o systema de forças dado pertence á terceira classe, e que não é  $A=B$ , e sendo nessa equação  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  os cosenos dos angulos que  $R$  faz com os tres eixos principaes positivos.

129. Da equação (121) se conclue que quando  $R$  coincide com a direcção positiva do terceiro eixo principal, caso em que  $c=c'=0$ ,  $c''=1$ , é  $K=A+B$ ; se coincidir na direcção negativa desse eixo, sendo então  $c''=-1$ , teremos  $K=\pm (A-B)$ , conforme for  $A > B$ ; se coincidir com o primeiro eixo principal é  $c=c''=0$ ,  $c'=\pm 1$ , logo  $K=B$ ; e se coincidir com o segundo eixo principal será  $K=A$ . Estes tres valores obter-se-hião tambem por simples considerações geometricas. Com effeito seria mui facil de reconhecer a exactidão desses valores, se na configuração inicial, em que se toma o eixo  $OZ$  perpendicular ao plano da ellipse de redução, e paralelo a  $R$ , se tomassem os eixos  $OX$ ,  $OY$  de modo, que osdons binarios resultantes fossem os binarios principaes; porque então entre todas as configurações em que  $R$  se conservasse paralela a  $OZ$ ,  $K$  seria maximo quando  $X$ ,  $Y$ , fossem simultaneamente perpendiculares a  $OX$ ,  $OY$ , e teriamos nesse caso  $K=A+B$ , ou  $K=\pm (A-B)$  conforme fosse directo, ou inverso o systema dos dous binarios resultantes:

para todas as configurações em que  $R$  fosse paralela a  $OX$ , o binario correspondente ao eixo  $OX$ , não daria projecção no plano perpendicular a  $R$ , e teríamos o maximo  $K = B$ ; e acharíamos finalmente o maximo  $K = A$  para  $R$  paralela a  $OY$ . Ora é evidente que esses maximos valores de  $K$  são independentes do modo como se faz a decomposição das forças na configuração inicial, mas dependem pura e simplesmente das tres posições fixas de  $R$ , em que considerámos essa linha successivamente paralela aos tres eixos principaes.

130. A equação (121) mostra que é sempre  $K^2 > 2 c'' AB$ ; se supposermos pois

$$K^2 = 2 c'' AB + \frac{R^6}{r^2} \dots \dots \dots (122)$$

a dita equação mudar-se-ha em

$$R^6 = c^2 r^2 B^2 + c'^2 r^2 A^2 + c''^2 r^2 (A^2 + B^2);$$

logo se para todas as direcções de  $R$  tomarmos no sentido desta força, e a partir do centro do systema, uma grandeza  $r$ , que satisfaça á equação (122), e designarmos por  $x$ ,  $y$ ,  $z$  as coordenadas do extremo de  $r$  em relação aos tres eixos principaes, a ultima equação reduzir-se-ha a

$$R^6 = B^2 x^2 + A^2 y^2 + (A^2 + B^2) z^2 \dots \dots \dots (123)$$

que representa um ellipsoide, cujos tres semieixos são (101)

$$A_{11} = \frac{R^3}{B} = B_1; B_{11} = \frac{R^3}{A} = A_1; C_{11} = \frac{R^3}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A_1 B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}};$$

donde se vê que a secção principal do ellipsoide (123), a que correspondem os semieixos maximo, e medio é semelhante á ellipse de reducção, e semelhantemente disposta, e igual á base do cylindro de reducção dos eixos centraes, mas collocada de modo, que os eixos homologos são perpendiculares. Chamaremos á superficie dada pela equação (123) *ellipsoide dos momentos maximos*. O valor de  $C_{11}$ , mostra que o semieixo minimo é igual á distancia do centro da

base do cylindro de redução á corda que liga os extremos dos eixos da mesma base.

131. Para conhecer os casos em que é  $K=0$ , faremos

$$2c''AB + \frac{R^6}{r^2} = 0 \dots\dots\dots (124)$$

donde

$$rz = - \frac{R^6}{2AB}, \text{ ou } r^2z^2 = \frac{R^{12}}{4A^2B^2};$$

a possibilidade da equação (124) exige que no ellipsoide dos momentos maximos não seja o maximo valor de  $r^2z^2$  menor

que  $\frac{R^{12}}{4A^2B^2}$ ; verificada esta condição, (124) é possivel, pois que o minimo valor de  $r^2z^2$  é zero.

Para termos o maximo valor de  $r^2z^2$  supponhamos que se fez no ellipsoide uma secção qualquer plana passando pelo eixo menor; esta secção será uma ellipse cujo semieixo menor é o semieixo menor  $C_{11}$  do ellipsoide, e cujo semieixo maior designaremos por  $a$ , e teremos, contando os  $x$  no sentido de  $a$

$$r^2 = z^2 + x^2 = z^2 + \frac{a^2}{C_{11}^2} (C_{11}^2 - z^2) = a^2 - \frac{a^2 - C_{11}^2}{C_{11}^2} z^2;$$

$$r^2z^2 = z^2 \left( a^2 - \frac{a^2 - C_{11}^2}{C_{11}^2} z^2 \right) = z^2 a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{C_{11}^2} \right) + z^4 \dots (125).$$

No vertice de  $C_{11}$  é  $r^2z^2 = z^4 = C_{11}^4$ ; indagaremos porém o maximo valor de  $r^2z^2$  fóra desse ponto. Então mostra a equação (125), que  $r^2z^2$  cresce com  $a$ . Suppondo pois  $A > B$ , será  $A_{11}$  o semieixo maior do ellipsoide, e por isso o maximo valor de  $r^2z^2$  é o que corresponde ao maximo de

$$\begin{aligned} z^6 \left( A_{11}^2 - \frac{A_{11}^2 - C_{11}^2}{C_{11}^2} z^2 \right) &= \frac{A_{11}^2 - C_{11}^2}{C_{11}^2} \left( \frac{A_{11}^2 C_{11}^2}{A_{11}^2 - C_{11}^2} - z^2 \right) z^2 \\ &= \frac{A_{11}^2 - C_{11}^2}{C_{11}^2} \left( \frac{\frac{1}{2} A_{11}^2 C_{11}^2}{A_{11}^2 - C_{11}^2} + \frac{\frac{1}{2} A_{11}^2 C_{11}^2}{A_{11}^2 - C_{11}^2} - z^2 \right) \left( \frac{\frac{1}{2} A_{11}^2 C_{11}^2}{A_{11}^2 - C_{11}^2} - \left( \frac{\frac{1}{2} A_{11}^2 C_{11}^2}{A_{11}^2 - C_{11}^2} - z^2 \right) \right) \\ &= \frac{A_{11}^2 - C_{11}^2}{C_{11}^2} \left( \frac{\frac{1}{2} A_{11}^4 C_{11}^4}{(A_{11}^2 - C_{11}^2)^2} - \left( \frac{\frac{1}{2} A_{11}^2 C_{11}^2}{A_{11}^2 - C_{11}^2} - z^2 \right)^2 \right), \end{aligned}$$

função de que evidentemente se obterá o maximo fazendo

$$z^2 = \frac{\frac{1}{2} A_{II}^2 C_{II}^2}{A_{II}^2 - C_{II}^2},$$

valor possivel, e será por tanto o maximo valor de

$$r^2 z^2 = \frac{\frac{1}{2} A_{II}^4 C_{II}^2}{A_{II}^2 - C_{II}^2},$$

isto é, substituindo os valores de  $A_{II}$ ,  $C_{II}$

$$r^2 z^2 = \frac{R^{12}}{4 A^2 B^2}, \dots \dots \dots (126)$$

valor maximo absoluto, visto que tambem para o vertice de

$C_{II}$  teremos  $r^2 z^2 = C_{II}^4 = \frac{R^{12}}{(A^2 + B^2)^2} < \frac{R^{12}}{4 A^2 B^2}$ . Logo é

$K=0$ , isto é, haverá uma resultante unica em todas as configurações em que  $R$ , existindo no plano dos semieixos maximo, e minimo  $A_{II}$ ,  $C_{II}$ , fizer com o ultimo um angulo cujo coseno

$$c'' = -\frac{R^6}{2 AB r^2} = -\frac{R^6 z^2}{2 AB r^2 z^2} = -\frac{R^6}{A_{II}^2 \cdot AB} = -\frac{B}{A},$$

correspondendo esse angulo a duas posições symetricas de  $R$ , ou  $r$  de ambos os lados do eixo  $C_{II}$ , e nas quaes  $r z$ , prescindindo do signal negativo, é um maximo no ellipsoide.

E' facil de ver que se fosse  $A < B$ , seria  $B_{II} > A_{II}$ , e teriamos, procedendo semelhantemente

$$c'' = -\frac{A}{B}.$$

132. Podiamos chegar mais directamente á conclusão do § precedente empregando só a equação (121). Procuremos pois determinar o minimo valor do  $K$ , para o que suppondo  $A > B$ , mudaremos (121) em

$$K^2 = B^2 + (A^2 - B^2) \cdot c'^2 \pm A^2 c''^2 \pm 2 ABC'',$$

ou  $K^2 = (A^2 - B^2) c'^2 + (B + Ac'')^2 \dots \dots \dots (127)$

donde se conclue que  $K^2$  será nullo, e por conseguinte minimo absoluto, quando tivermos

$$c' = 0; B + Ac'' = 0, \text{ ou } c'' = -\frac{B}{A};$$

equações que mostram que terão resultante unica todas as configurações, para as quaes existindo  $R$  no plano do primeiro, e terceiro eixos principaes, fizer com o ultimo, na direcção positiva  $OZ$ , de um ou outro lado, um angulo cujo coseno  $c'' = -\frac{B}{A}$ .

Se pretendessemos conhecer o maximo absoluto de  $K$ , suppondo ainda  $A > B$ , dariamos á equação (121) a fórma

$$K^2 = (A + Bc'')^2 - (A^2 - B^2) c^2 \dots \dots \dots (128)$$

que mostra que o maximo terá logar quando for  $c = 0, c'' = 1$ , e por tanto  $c' = 0$ , donde

$$K = A + B.$$

Este valor corresponde ás configurações em que  $R$  coincide com a direcção positiva do terceiro eixo principal.

Se fosse  $B > A$ , achariamos semelhantemente para o maximo

$$c'' = 1; c = c' = 0; K = A + B;$$

e para o minimo

$$c = 0; c'' = -\frac{A}{B}; K = 0.$$

133. Se supusermos  $A = B$  o ellipsoide dos momentos maximos é de revolução, tendo por eixo  $OZ$ . Neste caso a equação (121) reduz-se a

$$K^2 = A^2 (c^2 + c'^2 + 2c''^2 + 2c'') = A^2 (1 + c'')^2,$$

donde

$$K = A(1 + c'') = 2A \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \gamma,$$

fazendo  $c'' = \operatorname{Cos} \gamma$ , e excluindo o signal —, visto que  $K$  é uma quantidade positiva. Como nunca é  $\gamma > 180^\circ$ ,  $\frac{1}{2} \gamma$  deverá só variar desde  $0^\circ$ , até  $90^\circ$ ; vê-se pois que o maximo valor de  $K$  é  $2A$  para  $\gamma = 0$ , e que  $K$  decresce continuamente crescendo  $\gamma$ , de modo que será  $K = 0$  para  $\gamma = 180^\circ$ , isto é, o systema gyrate dado terá uma resultante unica para todas as configurações em que  $R$  tiver a direcção negativa do terceiro eixo principal: será  $K = A$  para todas as configurações em que  $R$  for perpendicular ao dito eixo: e em geral todas as configurações, em que  $R$  fizer angulos iguaes com a direcção positiva do terceiro eixo principal, terão iguaes momentos maximos  $K$ .

134. Se o systema gyrate pertencer á segunda classe, o valor achado (§ 123)  $n = \pm A'B' \operatorname{Sen} \omega$  aniquilar-se-ha, pois que então necessariamente é  $A' = 0$ , ou  $B' = 0$ , ou  $\operatorname{Sen} \omega = 0$ . Neste caso suppondo que o braço do binario resultante é paralelo ao eixo principal  $OX$ , teremos tambem

(§ 119)  $f = h = 0$ ;  $c = A = \sqrt{\sum^2 xX + \sum^2 xY}$ : logo a equação (119) reduz-se nestas hypotheses a

$$K^2 = (1 - c^2) A^2, \text{ ou } K = A \operatorname{Sen} \alpha,$$

sendo  $\alpha$  o angulo que faz  $R$  com o braço do binario resultante, e  $A$  o momento maximo desse binario: será pois  $A$  o maximo valor de  $K$ , e corresponderá ás configurações em que  $R$  for perpendicular a esse braço; haverá resultante unica quando  $R$  tiver a direcção do mesmo braço em qualquer sentido; e em geral terão momentos maximos iguaes todas as configurações, em que  $R$  fizer angulos iguaes, ou supplementos com a direcção do dito braço.

Finalmente se o systema for da primeira classe é sempre  $K = 0$ .

135. Do que dissemos precedentemente se conclue:

1.º Se em um systema gyrate houver uma só direcção de  $R$  para a qual exista resultante unica em todas as configurações respectivas, o systema será da 3.ª Classe, essa direcção será a do 3.º eixo principal negativo, e ter-se-ha  $A = B$ .

2.º Se houver só duas direcções não oppostas de  $R$ , para

as quaes exista resultante unica em todas as configurações, o systema gyrante pertencerá á 3.ª classe, e o 3.º eixo principal positivo será a linha existente no plano dessas duas direcções de  $R$ , e que bisecta o respectivo angulo, cujo valor se tomará sempre  $> 180^\circ$ .

3.º Se houver só duas direcções oppostas de  $R$ , para as quaes existe resultante unica em todas as configurações, o systema pertencerá á 2.ª classe, coincidindo o braço do binario resultante com essas direcções de  $R$ .

4.º Se houver mais de duas direcções de  $R$ , para as quaes exista resultante unica em todas as configurações, o systema pertencerá á primeira classe, e terá resultante unica em todas as configurações.

136. Todas as direcções  $R$ , a que corresponde o mesmo momento maximo  $K$ , são evidentemente determinadas pelos raios vectores  $r$ , que simultaneamente pertencem ao ellipsoide dos momentos maximos, e á superficie de revolução dada pela equação (122)

$$r^2 = \frac{R^6}{K^2 - 2AB \cos \gamma} \dots \dots \dots (129).$$

As duas curvas d'intersecção destas duas superficies darão os  $r$  que satisfazem á condição requerida. A superficie (129), que tem por geratriz uma curva da 4.ª ordem, encontrará sempre a direcção negativa do terceiro eixo principal, e por consequente será sempre uma superficie fechada para esse lado. A distancia desse ponto d'intersecção ao centro do systema é

$$r' = \frac{R^3}{\sqrt{K^2 + 2AB}},$$

e por consequente será  $r' = \langle \rangle C''$ , conforme for

$$K^2 + 2AB = \langle \rangle A^2 + B^2,$$

isto é,

$$K = \langle \rangle A - B,$$

suppondo  $A > B$ . No primeiro caso a superficie (129) toca o ellipsoide no extremo inferior do eixo  $2 C''$ . Em quanto for  $K^2 > 2AB$ , a superficie (129) encontrará tambem a direcção

positiva do terceiro eixo principal, isto é, será inteiramente fechada; sendo  $K^2 = 2AB$  esse eixo será uma assymptota da superficie (129); e sendo  $K^2 < 2AB$ , haverá uma pyramide conica recta assymptotica de base circular, em que a inclinação do eixo sobre qualquer geratriz é dada pela equação

$$\text{Cos } \gamma = \frac{K^2}{2AB}.$$

137. A determinação analytica de todas as direcções de  $R$ , que correspondem a um mesmo valor  $K$ , obtém-se facilmente empregando a equação (128)

$$K^2 = (A + Bc'')^2 - (A^2 - B^2) c^2,$$

donde se deduz

$$Bc'' = -A \pm \sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2} \dots \dots \dots (130).$$

Suppondo para mais facilidade  $A > B$ , a equação (130) dará sempre valores reaes para  $c''$ ; mas além disso para que tenhamos soluções possiveis, é necessario que, para qualquer valor arbitrariamente tomado para  $c$ , tenhamos satisfeita a condição

$$c^2 + c''^2 = < 1 \dots \dots \dots (131)$$

a qual obriga a excluir o signal — no radical da equação (130), pois que do contrario devendo ser

$$B^2 c''^2 + B^2 c^2 = \left( A + \sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2} \right)^2 + B^2 c^2 = < B^2,$$

teriamos, fazendo  $c = \text{Cos } \alpha$ ,

$$+ \sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2} = < B \text{ Sen } \alpha - A,$$

o que é impossivel sendo  $A > B$ . Logo (130) reduz-se a

$$Bc'' = -A + \sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2} \dots \dots \dots (132)$$

devendo ser ainda

$$\left(-A + \sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2}\right)^2 = < B^2 \text{ Sen}^2 \alpha \dots \dots \dots (133).$$

Se supposermos

$$\sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2} > A, \text{ ou } K^2 > A^2 - (A^2 - B^2) c^2 \dots (134)$$

concluiremos de (133)

$$K^2 + (A^2 - B^2) c^2 = < (B \text{ Sen } \alpha + A)^2,$$

donde

$$K = < B + A \text{ Sen } \alpha \dots \dots \dots (135).$$

Suppondo porêm

$$\sqrt{K^2 + (A^2 - B^2) c^2} < A, \text{ ou } K^2 < A^2 - (A^2 - B^2) c^2 \dots (136)$$

concluiremos

$$K^2 + (A^2 - B^2) c^2 = > (A - B \text{ Sen } \alpha)^2,$$

donde

$$K = > A \text{ Sen } \alpha \text{ ou } B \dots \dots \dots (137).$$

Finalmente suppondo

$$K^2 = A^2 - (A^2 - B^2) c^2 \dots \dots \dots (138)$$

a condição (133), que se reduz a

$$0 = < B^2 \text{ Sen}^2 \alpha,$$

é sempre satisfeita.

Ora o segundo membro de

$$K^2 > < = A^2 - (A^2 - B^2) c^2$$

reunião das tres hypotheses (34, 36, 38) é sempre comprehendido entre

$$(A \operatorname{Sen} \alpha \text{ ou } B)^2, (A \operatorname{Sen} \alpha + B)^2$$

quadrados dos limites das condições (37, 35): logo resumindo a discussão precedente, vê-se que  $K$ , ou  $c$  podem ser tomados arbitrariamente com as restricções

$$K = > A \operatorname{Sen} \alpha \text{ ou } B; K = < A \operatorname{Sen} \alpha + B \dots \dots \dots (139).$$

A equação (132) mostrar-nos-ha por conseguinte, que para cada grupo de valores  $K$ ,  $c$  que satisfação ás condições (139), haverá duas direcções de  $R$  symetricamente collocadas em relação ao primeiro, e terceiro eixos principaes, e para as quaes  $K$  terá a mesma grandeza.

138. Para qualquer direcção de  $R$  ha sempre duas configurações, distantes  $180^\circ$ , para as quaes existe resultante unica. Para determinar todas as configurações em que esta propriedade se verifica, devemos na equação achada (§ 126)

$$M' = a \sum xY + a' \sum yY + a'' \sum zY - b \sum xX - b' \sum yX - b'' \sum zX$$

suppor  $M' = 0$ . Para chegar a obter as condições mais simples, convem adoptar um systema particular de eixos fixos e de eixos directrizes, e partir d'uma configuração inicial determinada. Podemos suppor que os eixos fixos  $OX$ ,  $OY$  se tomão na direcção do primeiro, e segundo eixos principaes; que se adoptão os eixos directrizes  $OX'$ ,  $OY'$  em relação aos quaes os dous binarios resultantes são os principaes; e finalmente que se considera a configuração, que nos deu a equação (116, § 125), e em que  $OX'$  é paralela a  $OY$ , e  $OY'$  a  $-OX$ . Essas hypotheses farião desaparecer quatro termos do valor de  $M'$ ; podemos porém obter um valor igualmente simples, adoptando uma configuração inicial em que tambem seja  $M' = 0$ .

Partindo da configuração a que correspondem as indicadas posições dos eixos, faça-se rotar inversamente  $90^\circ$  o systema directriz sobre  $OZ'$ ; as forças positivas  $X_i$ ,  $Y_i$  que se achão applicadas aos eixos positivos  $OX$ ,  $OY$  tomarão o sentido positivo desses eixos, e visivelmente será então  $M' = 0$ . Tomaremos pois esta configuração como inicial, e pelas hypotheses que fizemos ácerca das direcções dos eixos fixos, e dos directrizes, é claro que teremos

$$\Sigma xY = \Sigma zY = \Sigma yX = \Sigma zX = 0;$$

$$\Sigma xX = A; \Sigma yY = B;$$

logo para todas as configurações em que  $M' = 0$ , deverá ser

$$a'B - bA = 0 \dots \dots \dots (140)$$

equação, que pelas formulas d'Euler (78) se muda em

$$(\text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \theta + \text{Cos } \varphi \text{ Sen } \psi) B + (\text{Sen } \psi \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } \theta + \text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi) A = 0. \dots (141)$$

donde se deduz

$$\text{tg } \varphi = - \text{tg } \psi \frac{A \text{ Cos } \theta + B}{B \text{ Cos } \theta + A} \dots \dots \dots (142).$$

E' facil demonstrar que esta equação substitue completamente a equação (141), ainda quando seja zero qualquer das quantidades  $\text{Cos } \psi$ ,  $\text{Cos } \varphi$ ,  $B \text{ Cos } \theta + A$  pelas quaes a ultima foi dividida.

139. Da equação precedente concluiremos

1.º Dada uma qualquer direcção de  $R$ , isto é, fixado o plano directriz  $X'Y'$ , ou os angulos  $\theta$ ,  $\psi$  que o determinão, haverá sempre duas configurações a que correspondem os angulos  $\varphi$ ,  $\varphi + 180^\circ$ , para as quaes existe resultante unica.

2.º Se supposermos  $\theta = 0$ , evidentemente podemos tomar arbitrariamente a grandeza do angulo  $\psi$ , e teremos  $\text{tg } \varphi = - \text{tg } \psi$ , isto é, a supposta intersecção determinada pelo angulo  $\psi$  deve retrogradar  $\psi$ , ou  $\psi + 180^\circ$  para representar as duas posições da directriz  $OX'$ , correspondentes ás duas configurações em que ha resultante unica, isto é, essas configurações são a inicial, e a que resulta de, a partir dessa configuração, fazer rotar o systema de forças dado  $180^\circ$ , sobre o eixo fixo  $OZ$ .

3.º Suppondo  $\theta = 180^\circ$ ,  $\psi$  é tambem arbitrario, e teremos

$$\text{tg } \varphi = \text{tg } \psi \frac{A - B}{A + B};$$

o systema dos dous binarios resultantes é então inverso, e se  $A$ , e  $B$  forem differentes, teremos

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi, \quad \varphi = \psi, \quad \text{ou} \quad \varphi = \psi + 180^\circ;$$

donde se conclue que as duas configurações em que ha resultante unica determinão-se, uma rotando o systema  $180^\circ$  sobre a posição inicial da directriz  $OX'$ , a começar da configuração inicial, e outra fazendo gyrrar o systema  $180^\circ$  sobre o  $R$  correspondente áquella primeira configuração em que ha resultante unica, e a partir da mesma.

Se porêem for  $A=B$ , teremos  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{0}$ , isto é, haverá resultante unica para todas as configurações em que for  $\theta = 180^\circ$ . Com effeito (§ 133) para  $K=0$ , teremos  $\operatorname{Cos} \theta = -1$ , sendo  $A=B$ . Determinando pelo principio demonstrado (§ 42) o centro das duas forças rectangulares  $X_i, Y_i$ , ver-se-ha que, no caso actual, o centro do systema coincide com esse centro, como aliás era evidente.

4.º Suppondo  $A > B$  se for

$$A \operatorname{Cos} \theta + B = 0; \quad \psi = 90^\circ, \quad \text{ou} \quad \psi = 270^\circ,$$

a equação (142) dará  $\operatorname{tg} \varphi = \infty.0$ , isto é,  $\varphi$  indeterminado: logo haverá resultante unica para todas as configurações em que  $R$ , existindo no plano dos eixos fixos  $OZ, OX$ , fizer com o primeiro de um, ou outro lado um angulo  $\theta$  dado pela equação  $\operatorname{Cos} \theta = -\frac{B}{A}$ , o que já tinha-

mos achado (§§ 131, 132).

5.º Se for  $A < B$ , e tivermos

$$B \operatorname{Cos} \theta + A = 0, \quad \text{e} \quad \psi = 0, \quad \text{ou} \quad \psi = 180^\circ,$$

(142) dará  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{0}$ , isto é,  $\varphi$  indeterminado, como tam-

bem se viu (§§ 131, 132).

6.º Se supposermos  $A=B$ , teremos sempre

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \psi,$$

equação que se traduz na seguinte construcção geometrica: para termos todas as configurações em que ha resul-

tante unica devemos, a partir de qualquer das duas configurações iniciais em que  $R$  é resultante unica, effectuar todas as rotações possíveis do systema d'eixos directrizes, sobre cada uma das rectas que existem no plano dos dous primeiros eixos principaes. Esta construcção dá evidentemente resultante unica para todas as configurações em que  $R$  é opposta á sua direcção inicial.

7.º Finalmente se o systema de forças dadas pertencer á 2.ª classe (§ 98), uma das duas quantidades  $A$ ,  $B$  deve aniquilar-se. Suppondo pois  $B=0$ , e por conseguinte o braço do binario resultante paralelo ao eixo fixo  $OX$ , a equação (142) reduz-se a

$$-\text{Cos } \theta = \text{Cot } \psi \text{ tg } \phi,$$

que mostra, que em todas as configurações em que ha resultante unica, deve o plano directriz  $X'OZ'$  passar pelo eixo fixo  $OX$ , e reciprocamente. Esta conclusão é aliás obvia, attendendo a que em um systema de forças reduzi-veis a uma força, e um binario gyranes, as configurações em que ha resultante unica, são aquellas em que a dita força é paralela ao plano do binario.

140. Para determinarmos agora todas as configurações em que, para a mesma direcção de  $R$ , o momento resultante minimum é maximo, ou minimo, isto é, tem a grandeza  $+K$ , ou  $-K$ , designemos por  $C$ , qualquer dessas configurações; por  $C'$  a configuração que desta se obtem fazendo rotar o systema inversamente  $90^\circ$  sobre  $R$ ; a  $C'$  corresponderá resultante unica. Chamemos  $C_1$ ,  $C$  as configurações analogas a  $C$ ,  $C'$  quando  $R$  coincide com o terceiro eixo principal positivo  $OZ$ .

A configuração  $C'$  deduz-se de  $C$  como vimos por meio da equação

$$\text{tg } \phi = -\text{tg } \psi \frac{A \text{ Cos } \theta + B}{B \text{ Cos } \theta + A}.$$

Sejão semelhantemente  $\phi_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\theta$  os angulos que ligão os eixos directrizes de  $C_1$  aos de  $C$ , teremos

$$\psi_1 = \psi - 90^\circ; \phi_1 = \phi + 90^\circ;$$

equações que mudão a precedente em

$$\text{Cot } \varphi_i = -\text{Cot } \psi_i \frac{A \text{ Cos } \theta + B}{B \text{ Cos } \theta + A},$$

ou

$$\text{tg } \varphi_i = -\text{tg } \psi_i \frac{B \text{ Cos } \theta + A}{A \text{ Cos } \theta + B} \dots \dots \dots (143).$$

Desta equação poderemos inferir conclusões inteiramente semelhantes ás que mencionámos no (§ 139), advertindo que a configuração inicial é agora aquella em que coincidindo  $R$  com o eixo positivo  $OZ$ , o momento resultante minimum tem o valor maximum, ou minimum,  $A+B$ , ou  $-(A+B)$ , e as configurações dadas pelos angulos  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i + 180^\circ$  são igualmente aquellas que tem momentos resultantes minima maximums, ou minimums.

141. Será conveniente porém distinguir as duas series de configurações, a que correspondem os momentos maximums, e minimums, indicando claramente a ligação geometrica das posições successivas do systema directriz em cada uma dessas series.

Supponhamos pois que na configuração inicial o momento resultante minimum era maximum, e que pretendemos conhecer todas as configurações a que correspondem momentos maximums. A equação (143) resolve esta questão, uma vez que designemos para cada valor de  $\theta$ , e de  $\psi_i$  qual dos angulos  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i + 180^\circ$  deve ser adoptado.

Para evitar a ambiguidade, que acompanha o valor de  $\varphi_i$  dado pela equação (143), recorreremos á equação estabelecida no (§ 126) para representar um momento resultante minimum qualquer, isto é,

$$M' = a \Sigma xY + a' \Sigma yY + a'' \Sigma zY - b \Sigma xX - b' \Sigma yX - b'' \Sigma zX,$$

a qual se simplifica excessivamente na hypothese actual de que a configuração inicial é aquella em que a directriz  $OZ'$  tem a direcção e sentido do terceiro eixo principal positivo  $OZ$ , sendo principaes, e do systema directo os dous binarios resultantes, e sendo maximum o binario resultante minimum: nestas hypotheses teremos, como é facil de ver

$$\Sigma yY = \Sigma zY = \Sigma xX = \Sigma zX = 0;$$

$$\Sigma xY = B; \Sigma yX = -A;$$

e por tanto

$$M' = aB + b'A,$$

ou empregando as formulas de Euler

$$M' = -\text{Sen } \varphi_1 \text{ Sen } \psi_1 (B \text{ Cos } \theta + A) + \text{Cos } \varphi_1 \text{ Cos } \psi_1 (B + A \text{ Cos } \theta) \dots (144).$$

Esta equação fornecerá sempre o criterio necessario para conhecer qual dos dous valores de  $\varphi_1$  dados pela equação (143) deve ser adoptado.

142. Para exprimir facilmente a correspondencia dos quadrantes a que devem pertencer  $\varphi_1, \psi_1$ , chamaremos quadrantes horisontaes o 1.º, e 2.º, ou o 3.º, e 4.º; quadrantes verticaes o 1.º, e 4.º, ou o 2.º, e 3.º; quadrantes oppostos o 1.º, e 3.º, ou o 2.º, e 4.º. Com estas denominações formaremos facilmente o quadro seguinte, que nos servirá para o criterio das equações (143, 144)

$\varphi_1, \psi_1$	$\text{tg } \varphi_1, \text{tg } \psi_1$	$\text{Sen } \varphi_1, \text{Sen } \psi_1$	$\text{Cos } \varphi_1, \text{Cos } \psi_1$	
1. Do mesmo quadrante.....	do mesmo signal.....	positivo.....	positivo	} (145).
2. De quadrantes horisontaes.....	de differente signal.....	positivo.....	negativo	
3. De quadrantes verticaes.....	de differente signal.....	negativo.....	positivo	
4. De quadrantes oppostos.....	do mesmo signal.....	negativo.....	negativo	

Isto supposto, imaginando primeiro que nenhuma das quantidades  $A, B$  se aniquila, isto é, que o systema gyrrante é da terceira classe, teremos a considerar os seguintes casos:

$$1.º \quad A > B; \text{Cos } \theta > -\frac{B}{A}.$$

Neste caso serão positivas ambas as quantidades  $B \text{ Cos } \theta + A, A \text{ Cos } \theta + B$ ; logo pela equação (143) teremos  $\text{tg } \psi_1, \text{tg } \varphi_1$  de differente signal, e por conseguinte terá logar o n.º 2, ou 3 do quadro (145); mas na equação (144), o n.º 2 faz  $M'$  negativo; logo  $\psi_1$ , e  $\varphi_1$  pertencem a dous quadrantes verticaes.

Por conseguinte se tivermos  $\psi_1 = 0$ , ou  $\psi_1 = 180^\circ$ , ou  $\psi_1 = 90^\circ$ , ou  $\psi_1 = 270^\circ$ , teremos respectivamente  $\varphi_1 = 0$ , ou

$\varphi_i = 180^\circ$ , ou  $\varphi_i = 270^\circ$ , ou  $\varphi_i = 90^\circ$ . Estes quatro casos deduzir-se-hião tambem directa e facilmente da equação (144).

$$2.^\circ \quad A > B; \quad \text{Cos } \theta = - \frac{B}{A}.$$

Teremos  $A \text{ Cos } \theta + B = 0$ ;  $B \text{ Cos } \theta + A$  positivo, e (144) muda-se em

$$M' = - \text{Sen } \varphi_i \text{ Sen } \psi_i (B \text{ Cos } \theta + A);$$

logo para  $\psi_i < 180^\circ$ ,  $M'$  será maximo quando  $\varphi_i = 270^\circ$ ; e para  $\psi_i > 180^\circ$ ,  $M'$  é maximo quando  $\varphi_i = 90^\circ$ . Se fosse  $\psi_i = 0$ , ou  $= 180^\circ$ . seria sempre  $M' = 0$ , o que concorda com o que achámos (§§ 131, 132, 139).

$$3.^\circ \quad A > B; \quad \text{Cos } \theta < \frac{-B}{A}.$$

Teremos  $A \text{ Cos } \theta + B$  negativo,  $A + B \text{ Cos } \theta$  positivo: logo pela equação (143)  $\text{tg } \psi_i$ ,  $\text{tg } \varphi_i$  tem o mesmo signal, e por consequente terá logar o n.º 1, ou o n.º 4 do quadro (145); mas on.º 1 faz  $M'$  negativo: logo  $\psi_i$ ,  $\varphi_i$  são de quadrantes oppostos: logo se tivermos  $\psi_i = 0$ , ou  $\psi_i = 180^\circ$ , ou  $\psi_i = 90^\circ$ , ou  $\psi_i = 270^\circ$ , teremos respectivamente  $\varphi_i = 180^\circ$ , ou  $\varphi_i = 0^\circ$ , ou  $\varphi_i = 270^\circ$ , ou  $\varphi_i = 90^\circ$ .

$$4.^\circ \quad A < B; \quad \text{Cos } \theta > - \frac{A}{B}.$$

Concluiremos como no primeiro caso, que  $\psi_i$ , e  $\varphi_i$  pertencem a dous quadrantes verticaes: e para  $\psi_i = 0$ ,  $\psi_i = 180^\circ$ ,  $\psi_i = 90^\circ$ ,  $\psi_i = 270^\circ$ , ter-se-ha respectivamente  $\varphi_i = 0^\circ$ ,  $\varphi_i = 180^\circ$ ,  $\varphi_i = 270^\circ$ ,  $\varphi_i = 90^\circ$ .

$$5.^\circ \quad A < B; \quad \text{Cos } \theta = - \frac{A}{B}.$$

A equação (144) reduz-se a

$$M' = \text{Cos } \varphi_i \text{ Cos } \psi_i (B + A \text{ Cos } \theta),$$

e, sendo sempre positivo o ultimo factor,  $M'$  será maximo para  $\varphi_i = 0^\circ$ , sendo  $\psi_i$  do 1.º, ou 4.º quadrante; ou para  $\varphi_i = 180^\circ$ , sendo  $\psi_i$  do 2.º, ou 3.º quadrante. Se fosse  $\psi_i = 90^\circ$ , ou  $\psi_i = 270^\circ$ , teriamos

$M' = 0$  para qualquer valor de  $\varphi_1$ , como achámos (§§ 131, 132, 139).

$$6.^\circ \quad A < B; \quad \text{Cos } \theta < -\frac{A}{B}.$$

Neste caso a equação (143) mostra que  $\text{tg } \psi_1, \text{tg } \varphi_1$  tem o mesmo signal, o que corresponde aos numeros 1, 4 do quadro (145); mas o n.º 4 faz  $M'$  negativo; logo  $\psi_1, \varphi_1$  são do mesmo quadrante: logo teremos simultaneamente  $\psi_1 = \varphi_1 = 0$ , ou  $\psi_1 = \varphi_1 = 180^\circ$ , ou  $\psi_1 = \varphi_1 = 90^\circ$ , ou  $\psi_1 = \varphi_1 = 270^\circ$ .

7.º Se supposermos que as duas quantidades  $A, B$  são iguaes, a equação (143), (não suppondo  $\theta = 180^\circ$ , donde  $K = 0$ ), dá

$$\text{tg } \varphi_1 = -\text{tg } \psi_1;$$

e a equação (144)

$$M' = A(1 + \text{Cos } \theta) (\text{Cos } \psi_1 \text{Cos } \varphi_1 - \text{Sen } \psi_1 \text{Sen } \varphi_1) = A(1 + \text{Cos } \theta) \text{Cos } (\psi_1 + \varphi_1);$$

a primeira destas equações corresponde aos numeros 2, 3 do quadro (145); mas o n.º 2 faz  $M'$  negativo; logo  $\varphi_1, \psi_1$  serão de quadrantes verticaes, isto é,  $\varphi_1 = -\psi_1$ , ou  $\varphi_1 + \psi_1 = 360^\circ$ , donde

$$M' = A(1 + \text{Cos } \theta),$$

como achámos (§ 133). E vê-se tambem que para obter todas as configurações, a que correspondem os maximos momentos resultantes minima, dever-se-ha fazer gyraz de qualquer modo o systema directriz sobre uma recta qual-quer situada no plano do primeiro, e segundo eixos principaes, e a partir da configuração inicial.

Resumindo a discussão precedente, vê-se que:

a Se na equação (143) for positiva a fracção  $\frac{B \text{Cos } \theta + A}{A \text{Cos } \theta + B}$ ,

$\psi_1$ , e  $\varphi_1$  pertencerão a dous quadrantes verticaes.

b Se for negativo o numerador  $B \text{Cos } \theta + A$ ,  $\psi_1, \varphi_1$  perten-  
cem ao mesmo quadrante.

c Se for negativo o denominador  $A \text{Cos } \theta + B$ ,  $\psi_1, \varphi_1$  per-  
tencem a quadrantes oppostos.

d Se for zero o numerador, será  $\varphi_1 = 0$  para  $\psi_1$  do 1.º, ou 4.º  
quadrante; e será  $\varphi_1 = 180^\circ$  para  $\psi_1$  do 2.º, ou 3.º qua-  
drante.

e Se for zero o denominador, será  $\phi_1 = 270^\circ$  para  $\psi_1 < 180^\circ$ , e  $\phi_1 = 90^\circ$  para  $\psi_1 > 180^\circ$ .

f Se o segundo membro de (143) se reduzir á fórma  $\frac{0}{0}$ , ou  $0 \times \infty$ ,  $\phi_1$  será indeterminado, e  $K = 0$ .

3.º Finalmente se supposermos, que uma das quantidades  $A$ ,  $B$  se aniquila, isto é, que o systema gyrate dado é da segunda classe, como neste caso não é determinado o plano em que temos contado os angulos  $\psi_1$ , será mais simples, em vez de recorrer ás equações (143, 144), referir as posições do systema directriz, que dá os maximos momentos resultantes minima, á direcção do braço do binario unico resultante.

Supponhamos pois  $B = 0$ , e por conseguinte  $A$  representará o momento maximo do binario resultante, do qual seja  $a$  o braço e  $F$  a força correspondente positiva. Para qualquer direcção de  $R$ , o momento resultante minimum será maximo, ou minimo quando as projecções de  $a$ , e  $F$  sobre o plano perpendicular a  $R$  forem entre si perpendiculares: logo em todas as configurações em que ha momentos resultantes minima maximos ou minimos,  $a$ , e  $F$  são perpendiculares. Em qualquer destas configurações é tambem facil de reconhecer, que o momento será maximo, ou minimo, conforme a disposição de  $R$ , e  $F$  for tal, que  $F$  tenda a produzir uma rotação directa, ou inversa em torno de  $R$ , e por conseguinte  $R$  tenda tambem a produzir uma rotação directa, ou inversa em torno de  $F$ .

Para obtermos pois todas as configurações em que é maximo o momento resultante minimum, tomemos uma configuração em que sendo  $R$ , e  $F$  perpendiculares a  $a$ , qualquer dessas forças tenda a produzir uma rotação directa em torno da outra: partindo dessa configuração inicial, ou de outra qualquer que se deduza della por uma rotação sobre  $F$  directa, ou inversa, e  $< 90^\circ$ , todas as configurações a que se chegar por uma rotação qualquer em torno de  $a$ , serão aquellas a que correspondem os momentos maximos. Sendo  $R$ ,  $F$  parallelas ás directrices  $OS'$ ,  $OX'$  é claro que a posição daquellas forças fixa a posição do systema directriz. Haverá resultante unica em todas as configurações, em que  $R$ , e  $a$  coincidirem na mesma direcção.

E' inutil considerar os systemas gyrate de 1.ª classe, pois que nestes não ha binario algum resultante, isto é, será então  $A = B = 0$ .

143. Determinada a posição do systema directriz, que corresponde a um maximo momento resultante minimum, teremos pelas equações (104, 116) a grandeza e direcção de  $\rho$ , e por conseguinte fica determinada a posição do eixo central dos momentos; a posição deste eixo, a grandeza e sentido de  $R$ , e a grandeza do momento resultante minimum correspondente completão a avaliação statica do systema gyrate na configuração, que se considerou.

144. Para qualquer configuração, em que não seja maximo o momento resultante minimum, representar-se-ha simplesmente o systema gyrate pela posição do eixo central dada pelas equações (104, 116), pela grandeza, e sentido de  $R$  dado pela directriz  $OZ'$ , e pela grandeza e sentido do momento resultante minimum, que são dados em geral pela equação

$$M' = a \Sigma xY + a' \Sigma yY + a'' \Sigma zY - b \Sigma xX - b' \Sigma yX - b'' \Sigma zX,$$

a qual, suppondo que se adoptarão as hypotheses do (§ 138), se reduz a

$$M' = a'B - bA \dots \dots \dots (146),$$

e, adoptando as hypotheses do (§ 141), muda-se em

$$M' = aB + b'A \dots \dots \dots (147).$$

145. O momento resultante minimum  $M'$  em qualquer configuração pôde tambem exprimir-se pelo maximo momento resultante minimum  $K$ , que corresponde á direcção de  $R$  para a configuração dada, e pelo angulo  $\omega$  que indica a rotação, que deve ter logar sobre  $R$ , para se passar da configuração, que dá o momento  $K$  para aquella, em que o momento é  $M'$ . Com effeito é facil de ver que teremos

$$M' = K \text{ Cos } \omega.$$

Para determinar o angulo  $\omega$ , acharemos pela formula (143) o angulo  $\phi_1$  que corresponde a  $K$ , e suppondo que é  $\phi'$  o angulo que corresponde a  $M'$ , teremos

$$\omega = \phi' - \phi_1.$$

146. O valor  $M'$  dado pela equação (146) suppõe, que

na configuração inicial as forças positivas  $X, Y$ , se achão applicadas a pontos do sentido positivo dos eixos  $OX, OY$ . Se porêem tomarmos por configuração inicial a que se deduz dessa, fazendo rotar o systema directriz  $180^\circ$  sobre  $R$ ,  $X, Y$ , achar-se-hão applicadas a pontos do sentido negativo dos eixos  $OX, OY$ , teremos

$$\Sigma xX = -A; \Sigma yY = -B; \Sigma yX = \Sigma zX = \Sigma xY = \Sigma zY = 0;$$

e (146) muda-se em

$$-M' = a'B - bA.$$

Semelhantemente na equação (147) suppondo que a configuração inicial é a que se deduz da supposta nessa equação por uma rotação de  $180^\circ$  sobre  $R$ , teremos

$$\Sigma xY = -B; \Sigma yX = A; \Sigma yY = \Sigma zY = \Sigma xX = \Sigma zX = 0;$$

e (147) converte-se em

$$-M' = aB + b'A.$$

Reunindo as duas hypotheses será

$$\underline{+} M' = a'B - bA \dots \dots \dots (148),$$

tomando por configuração inicial uma daquellas, em que  $R$  coincidindo com a direcção positiva do terceiro eixo principal, for  $M' = 0$ .

E teremos

$$\underline{+} M' = aB + b'A \dots \dots \dots (149)$$

tomando por configuração inicial uma daquellas, em que tendo  $R$  a direcção indicada, tiver  $M'$  a grandeza maxima  $A + B$ , ou minima  $-(A + B)$ .

Será por tanto nas hypotheses da equação (148),

$$M' = 0, \text{ sendo } a'B - bA = 0 \dots \dots \dots (150)$$

e nas hypotheses da equação (149)

$$M' = 0, \text{ sendo } aB + b'A = 0. \dots\dots\dots (151).$$

147. As equações (143, 149) dão, entre as configurações correspondentes á mesma direcção de  $R$ , as duas em que  $M'$  é maximo, ou minimo; e para isso não temos mais que exprimir  $a', b, a, b'$  pelas formulas d'Euler (78), e fazer

$$\frac{dM'}{d\varphi} = 0. \text{ Desse modo deduziremos de (143)}$$

$$(\text{Cos } \varphi \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \theta - \text{Sen } \varphi \text{ Sen } \psi) B + (-\text{Sen } \psi \text{ Sen } \varphi \text{ Cos } \theta + \text{Cos } \varphi \text{ Cos } \psi) A = 0,$$

isto é,

$$b'B + aA = 0. \dots\dots\dots (152).$$

Semelhantermente obteremos de (149)

$$(-\text{Cos } \varphi \text{ Sen } \psi \text{ Cos } \theta - \text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi) B + (-\text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \theta - \text{Cos } \varphi \text{ Sen } \psi) A = 0;$$

que equivale á formula achada (143), ou a

$$bB - a'A = 0. \dots\dots\dots (153).$$

As formulas (143, 149) uma vez que se deem as condições (152, 153) transformão-se respectivamente em

$$\underline{+} M' = -\frac{aa'A}{b'} - bA = \frac{Acc'}{b'};$$

$$\underline{+} M' = \frac{aa'A}{b} + b'A = -\frac{Acc'}{b};$$

expressões simples dos momentos maximos, e minimos, sendo na configuração inicial  $M' = 0$ , ou  $M' = \pm K$

148. As formulas (150, 151, 152, 153) dão uma representação mais clara das configurações em que é  $M' = 0$ , ou  $M' = \pm K$ , se as definirmos por meio do systema d'angulos  $\omega, x, y, z$ .

Pelas formulas (79) mudar-se-ha (150) em

$$(\text{Cos } z \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } y) B + (\text{Cos } z \text{ Sen } \omega - (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } y) A = 0 \text{ (154)}$$

donde

$$\frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega} = \frac{\cos z}{\cos x \cos y} \cdot \frac{A+B}{A-B},$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = \frac{\cos z}{\cos x \cos y} \cdot \frac{A+B}{A-B} \dots \dots \dots (155).$$

Do mesmo modo (151) transforma-se em

$$(\cos \omega + (1 - \cos \omega) \cos^2 x) B + (\cos \omega + (1 - \cos \omega) \cos^2 y) A = 0,$$

donde

$$-\cos \omega = \frac{A \cos^2 y + B \cos^2 x}{A \sin^2 y + B \sin^2 x} \dots \dots \dots (156)$$

Como (152, 153) se deduzem respectivamente de (151, 150) pela troca reciproca de  $A$ ,  $B$ , concluiremos de (156, 155) como transformações de (152, 153) as seguintes

$$-\cos \omega = \frac{A \cos^2 x + B \cos^2 y}{A \sin^2 x + B \sin^2 y} \dots \dots \dots (157)$$

$$-\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = \frac{\cos z}{\cos x \cos y} \cdot \frac{A+B}{A-B} \dots \dots \dots (158).$$

As formulas (155, 156) dão as configurações em que ha resultante unica; (157, 158) aquellas em que  $M'$  é maximo, ou minimo.

149. A posição dos eixos fixos  $OX$ ,  $OY$  a que se referem os angulos  $x$ ,  $y$  é nas formulas (156, 158) a que resulta, por meio d'uma rotação de  $90^\circ$ , ou  $270^\circ$  desses eixos sobre  $OZ$ , partindo da posição delles correspondente ás equações (155, 157). Refiramos por simplicidade todas essas formulas aos eixos  $OZ$ ,  $OX$ ,  $OY$ , que são as direcções positivas dos tres eixos principaes: em vez de (155, 156, 157, 158) teremos as seguintes equações

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \omega = \frac{\cos z}{\cos x \cos y} \cdot \frac{A+B}{A-B} \dots \dots \dots (159)$$

$$-\cos \omega = \frac{A \cos^2 x + B \cos^2 y}{A \sin^2 x + B \sin^2 y} \dots \dots \dots (160)$$

$$-\text{Cos } \omega = \frac{A \text{ Cos}^2 x + B \text{ Cos}^2 y}{A \text{ Sen}^2 x + B \text{ Sen}^2 y} \dots\dots\dots (161)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} \omega = \frac{\text{Cos } z}{\text{Cos } x \text{ Cos } y} \cdot \frac{A+B}{A-B} \dots\dots\dots (162).$$

150. Para discutir as formulas precedentes suppremos primeiro que  $A, B$  não são zero, nem iguaes. Nas formulas (159, 161) parte-se d'uma configuração inicial em que é  $M'=0$ , sendo  $R$  coincidente com o terceiro eixo principal positivo: e nas formulas (160, 162) suppre-se que tendo  $R$  a direcção indicada na configuração inicial, é então  $M'$  maximo, ou minimo, isto é,

$$M' = \pm (A + B).$$

As formulas (159, 162) mostram que para o mesmo eixo de rotação  $x, y, z$  a rotação  $\omega$  que dá  $M'=0$ , havendo resultante unica tambem na configuração inicial, é igual á rotação  $\omega$  que dá  $M'$  maximo, ou minimo, sendo tambem  $M'$  maximo, ou minimo na configuração inicial.

Pelas formulas (160, 161) vê-se tambem que para o mesmo eixo de rotação são arithmeticamente iguaes as rotações  $\omega$  que dão  $M'=0$ , ou  $M'$  maximo, ou minimo, partindo respectivamente de uma configuração inicial em que seja  $M'$  maximo, ou minimo, ou  $M'=0$ .

Nas formulas (159, 162)  $\omega$  tem sempre um valor possivel qualquer que seja o eixo de rotação. As formulas (160, 161) equivalendo a

$$-\text{Cos } \omega = \frac{A+B}{A \text{ Sen}^2 x + B \text{ Sen}^2 y} - 1,$$

$\omega$  terá sómente valores possiveis quando for  $A + B = < 2 (A \text{ Sen}^2 x + B \text{ Sen}^2 y)$ , ou

$$A \text{ Cos } 2 x + B \text{ Cos } 2 y = < 0.$$

As formulas (159, 162) deixão de ser verdadeiras quando se applicão ás respectivas configurações iniciaes, pois que então sendo indeterminados  $x, y, z$  comtudo é determinado  $\omega$ , e = 0.

Com effeito a equação (154) é satisfeita para  $\omega = 0$ , e della não podemos concluir analyticamente nesse caso a equação (155).

As equações (160, 161) não soffrem restricção alguma visto que forão deduzidas de formulas absolutamente verdadeiras, que se dividirão por  $A \text{ Sen}^2 x + B \text{ Sen}^2 y$ , que nunca póde ser zero. Essas formulas darão sempre  $\omega = > 90^\circ$ , e  $\omega = < 270^\circ$ . Como é sempre  $\omega < 360^\circ$  as formulas (159, 162) dão para cada posição do eixo de rotação  $x$ ,  $y$ ,  $z$  um só valor para  $\omega$ ; nas formulas (160, 161) para cada eixo de rotação, achamos para  $\omega$  dous valores  $\omega$ ,  $360^\circ - \omega$ .

Na formula (159), como se póde partir de duas configurações iniciaes para as quaes é  $M' = 0$ , teremos duas series de rotações  $\omega$  correspondentes ás diversas posições do eixo de rotação, e que dão todas as configurações em que ha resultante unica. Adoptando-se qualquer daquellas configurações iniciaes a formula (159) dá a outra, por quanto para  $\text{Cos } z = 1$ ;  $\text{Cos } x = \text{Cos } y = 0$ , temos  $\omega = 180^\circ$ .

Para todas as rotações que se fizerem sobre o eixo  $OX$ , ou sobre  $OY$  haverá resultante unica, pois que achamos então  $\text{tg } \frac{1}{2} \omega = \frac{0}{0}$ .

A formula (160) dá quatro series de configurações em que ha resultante unica, duas das quaes correspondem á configuração inicial em que é  $M' = A + B$ , e as outras duas á configuração inicial  $M' = -(A + B)$ . Quando for  $z = 0$ , ou  $z = 180^\circ$  as quatro series confundem-se em só duas configurações, em que é  $\omega = 90^\circ$ , ou  $\omega = 270^\circ$ , e  $\text{Cos } x = \text{Cos } y = 0$ . Eixo nenhum de rotação dá  $\omega$  indeterminado.

A formula (161) dá tambem quatro series de configurações em que é  $M'$  maximo, ou minimo, correspondentes duas á configuração inicial, em que as forças positivas  $X_i$ ,  $Y_i$  dos binarios principaes tem a direcção dos eixos principaes positivos  $OX$ ,  $OY$ , e outras duas áquella em que essas forças tem direcções oppostas ás indicadas.

Para conhecer se é maximum, ou minimum uma configuração correspondente a um grupo de angulos  $\omega$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  que satisfazem á equação (161), dever-se-ha examinar se esses angulos tornão  $M'$  positivo, ou negativo na equação (149), a qual pelas formulas (79) se muda em

$$\pm M' = \text{Cos } z \text{ Sen } \omega (A + B) + (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } y (B - A) \dots (163).$$

A formula (162) dá duas series de configurações maxima, e minima correspondentes ás duas configurações iniciaes

$$M' = A + B; M' = - (A + B).$$

Partindo de qualquer destas configurações, reconheceremos se um systema qualquer de angulos  $x, y, z, \omega$  que satisfazem á equação (162) corresponde a um maximum, ou a um minimum, conforme for positivo, ou negativo o valor de  $M'$  dado pela equação (149) que equivale a

$$\pm M' = \text{Cos } \omega (B \text{ Sen}^2 x + A \text{ Sen}^2 y) + B \text{ Cos}^2 x + A \text{ Cos}^2 y. \dots \dots (164).$$

151. Se suppozermos  $A = B$  as equações (159, 162) dão conforme for, ou deixar de ser  $\text{Cos } z = 0$

$$\text{tg } \frac{1}{2} \omega = \frac{0}{0}, \text{ ou } \text{tg } \frac{1}{2} \omega = \infty,$$

resultados que igualmente se obtem da equação (154), a qual além disso, não sendo  $\text{Cos } z = 0$ , dá tambem  $\omega = 0$ . Logo se for  $\text{Cos } z = 0$ , isto é, se o eixo de rotação  $x, y, z$  existir no plano  $OXY$ , será respectivamente ás hypotheses de (159), ou de (162)  $M' = 0$ , ou  $M' = \pm K$  para qualquer rotação  $\omega$ . E se não for  $\text{Cos } z = 0$ , teremos sempre  $\omega = 0$ , ou  $\omega = 180^\circ$  nas equações (159, 162) para qualquer eixo de rotação: o primeiro valor corresponde á configuração inicial respectiva a cada uma dessas equações.

As formulas (160, 161) na mesma hypothese  $A = B$  reduzem-se a

$$- \text{Cos } \omega = \frac{1 - \text{Cos}^2 z}{1 + \text{Cos}^2 z},$$

a qual mostra que, para cada eixo de rotação, nas duas configurações  $M' = 0$ , ou nas duas  $M' = \pm K$  depende  $\omega$  só do angulo que esse eixo forma com o eixo  $OZ$ .

Finalmente se suppozermos  $B = 0$ , as formulas (159, 160, 161, 162) reduzem-se a

$$\text{tg } \frac{1}{2} \omega = \frac{\text{Cos } z}{\text{Cos } x \text{ Cos } y}; - \text{Cos } \omega = \text{Cos}^2 x; - \text{Cos } \omega = \text{Cos}^2 x; \text{tg } \frac{1}{2} \omega = \frac{\text{Cos } x}{\text{Cos } x \text{ Cos } y};$$

a segunda e terceira das quaes mostram que, nas hypothe-

ses dessas equações, ás configurações  $M' = 0$ ,  $M' = \pm K$  correspondem rotações  $\omega$  só dependentes de  $x$ , e que essas configurações serão impossiveis sendo  $x < 45^\circ$ , ou  $x > 135^\circ$ .

152. As equações (161, 162) dão-nos as configurações em que  $M'$  tem o valor maximo, ou minimo, que designámos por  $+K$ , ou  $-K$ ; isto é, em cada uma dessas configurações  $M'$  será maximo, ou minimo, em relação a todas as configurações que tem a mesma direcção de  $R$ . Se pretendermos porém o maximo, ou minimo absoluto em relação a cada posição do eixo de rotação  $x, y, z$ , devemos nas equações (163, 164) determinar o maximo, ou minimo de  $M'$  em relação a  $\omega$ . A primeira dessas equações dará pois para o maximo, ou minimo de  $M'$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{Cos} z}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y} \cdot \frac{A+B}{A-B};$$

e a equação (164) além do maximum, ou minimum correspondente á configuração inicial em que é  $\omega = 0$ , [dá também para a configuração maximum, ou minimum

$$\operatorname{Cos} \omega = -1, \text{ ou } \omega = 180^\circ;$$

e teremos então

$$\pm M' = - (B \operatorname{Sen}^2 x + A \operatorname{Sen}^2 y) + B \operatorname{Cos}^2 x + A \operatorname{Cos}^2 y = B \operatorname{Cos} 2x + A \operatorname{Cos} 2y$$

$M'$  será maximo, ou minimo conforme se tomar no primeiro membro o signal  $-$ , ou o signal  $+$ , isto é, conforme  $M'$  tiver na configuração inicial o minimo valor absoluto  $-(A+B)$  do binario resultante minimum, ou o maximo valor absoluto  $A+B$  desse binario.

## V.

*Systemas gyrantes destituídos de resultante.*

153. Tractámos (2.<sup>a</sup> Parte I.) das propriedades de um systema de binarios cujos braços erão todos parallellos a um plano dado, e cujas forças erão tambem parallelas a outro plano. Para dar toda a generalidade a essa theoria, discutiremos agora um systema qualquer gyrente destituído de resultante, isto é, um systema de binarios gyrentes cujos braços, e forças tenham quaesquer direcções no espaço; porquanto se o systema dado não tem resultante, as forças que o compõem transportadas a um ponto arbitrariamente tomado devem dar uma resultante nulla, e teremos tantos binarios gyrentes, quantas as forças transportadas.

154. Um systema de binarios gyrentes pôde em geral reduzir-se a tres binarios gyrentes cujos braços, e cujas forças tenham direcções differentes no espaço. Com effeito tomemos arbitrariamente tres eixos divergentes no espaço  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , e decomponhão-se as forças dos binarios dados parallelamente a esses eixos; teremos seis grupos de forças gyrentes, dous a dous parallellos a cada um dos eixos: esses grupos reduzem-se a tres binarios gyrentes  $(X_1, -X_1)$ ,  $(Y_1, -Y_1)$ ,  $(Z_1, -Z_1)$ , cujos braços em geral serão todos divergentes.

A redução pôde tambem fazer-se tomando arbitrariamente as direcções dos braços dos tres binarios resultantes.

Supponhamos pois que se pretende que esses braços tenham as direcções dos tres eixos divergentes  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Pelo centro de cada força dada  $P$  faça-se passar um plano qualquer que encontre os eixos nos tres pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; a força  $P$ , uma vez fixada a posição daquelle plano, decompõe-se determinadamente em tres forças gyrantes parallelas, cujos centros são  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Decompondo semelhantemente as outras forças do systema  $P'$ ,  $P''$ , etc. em forças parallelas gyrantes applicadas aos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , etc. situados nos eixos; e transportando á origem  $O$  as forças applicadas a cada um dos eixos, teremos em cada um delles tantos binarios gyrantes quantas são as forças dadas; finalmente reduzindo a um só todos os binarios cujos braços existem sobre o mesmo eixo, ficará o systema de forças dado substituido por tres binarios gyrantes, cujos braços tem as direcções adoptadas  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

155. Se dous braços dos tres binarios resultantes forem parallelos, sendo as forças divergentes, os binarios correspondentes se reduzirão a um só binario, e por conseguinte o systema dado é reduzivel a dous binarios gyrantes. Se os tres braços dos binarios resultantes forem parallelos, sendo as forças divergentes, o systema dado reduz-se a um só binario gyrate.

Semelhantemente se as forças de dous dos tres binarios resultantes, vg.  $X_i$ ,  $Y_i$  forem parallelas, sendo os braços divergentes, compondo essas forças e as suas oppostas, os binarios respectivos reduzem-se a um só binario, e por conseguinte o systema dado equivale a dous binarios gyrantes.

E se suppozermos todas as forças  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  parallelas, sendo ainda divergentes os braços, a sua resultante, e a das forças oppostas constituirão um só binario gyrate.

Igualmente o systema de forças gyrantes dado reduzir-se-ha a só dous binarios resultantes, a um só, ou ao equilibrio em todas as configurações, conforme forem zero, um só dos momentos maximos dos tres binarios resultantes, dous delles, ou todos tres. Tambem é facil de ver que se o braço  $OC$  de um dos binarios resultantes existir no plano dos dous outros braços  $OA$ ,  $OB$ , aquelle binario poderá decompor-se em dous, cujos braços tenham as direcções  $OA$ ,  $OB$ ; e reduzindo a um só os binarios que tem os braços em cada uma dessas direcções, concluir-se-ha, que os tres binarios resultantes equivalem em geral a dous binarios

gyrantes. Finalmente se as forças  $X_1, Y_1, Z_1$  forem todas paralelas a um plano, achar-nos-hemos reduzidos ao caso que tractámos (2.<sup>a</sup> Parte I.).

156. Tres binarios  $(OA, X_1), (OB, Y_1), (OC, Z_1)$ , cujas forças, e cujos braços são divergentes não podem dar o equilibrio em todas as configurações, suppondo que não é nullo nenhum dos tres momentos maximos.

Com effeito se o equilibrio se desse em todas as configurações, tomando em sentido contrario as forças vg. do binario  $(OC, Z_1)$ , teriamos os dous binarios  $(OA, X_1), (OB, Y_1)$  equivalentes ao binario  $(OC, -Z_1)$ , o que é impossivel (§ 64).

Esta demonstração teria logar do mesmo modo, se os tres braços  $OA, OB, OC$  existissem no mesmo plano, ou as forças  $X_1, Y_1, Z_1$  fossem paralelas a um só plano.

O equilibrio dos tres binarios dados, em todas as configurações, seria tambem impossivel se os tres braços, ou as tres forças fossem divergentes no espaço; por quanto nesses dous casos era impossivel que o binario  $(OC, -Z_1)$  equivallesse aos dous  $(OA, X_1), (OB, Y_1)$ , pois quando estes se reduzem a um só, o braço deste é paralelo a um plano paralelo a  $OA$ , e  $OB$ , e as forças são paralelas a um plano paralelo a  $X_1$ , e a  $Y_1$ , e circumstancias que se não verificão ambas no binario  $(OC, Z_1)$ .

157. Se tivermos dous grupos equivalentes de tres binarios gyrantes, em cada um dos quaes os braços sejam divergentes no espaço; se os braços do primeiro grupo coincidirem em direcção respectivamente com os braços do segundo grupo, as forças do primeiro coincidirão tambem respectivamente em direcção e sentido com as forças do segundo, e os momentos maximos dos binarios serão correspondentemente iguaes nos dous grupos.

Com effeito transportem-se os dous grupos de modo que os braços tenham uma origem commum, e se achem applicados no mesmo sentido os braços paralelos. Mudem-se os centros das forças do segundo grupo de maneira, que sem alterar as direcções das forças, e os momentos maximos dos binarios desse grupo, fiquem absolutamente coincidentes em grandeza os braços dos dous grupos; supponhamos pois que, feito isto, temos applicadas aos extremos  $A, B, C$  dos tres braços as forças  $X_1, Y_1, Z_1$  correspondentes ao primeiro grupo, e as forças  $X_2, Y_2, Z_2$  correspondentes ao segundo.

Imaginemos por um momento que as ultimas não coincidem absolutamente em direcção, sentido, e grandeza com as primeiras: decomponha-se cada uma das forças  $X_{ii}$ ,  $Y_{ii}$ ,  $Z_{ii}$  respectivamente nas forças  $X_i$ ,  $X_{iii}$ ,  $Y_i$ ,  $Y_{iii}$ ,  $Z_i$ ,  $Z_{iii}$ , sendo as forças  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  coincidentes em direcção e sentido com as forças do primeiro grupo applicadas aos extremos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; concluir-se-ha, pela equivalencia dos dous grupos propostos, que haverá equilibrio em todas as configurações nos tres binarios  $(OA, X_{iii})$ ,  $(OB, Y_{iii})$ ,  $(OC, Z_{iii})$ ; ora se não forem simultaneamente  $X_{iii}=Y_{iii}=Z_{iii}=0$ , não podem estas tres forças ser divergentes (§ 156). Supponhamos pois  $X_{iii}$ ,  $Y_{iii}$  parallelas: se estas forças não são iguaes e contrarias, terão uma resultante  $X$  cujo centro  $A'$  existirá em  $AB$ , ou no seu prolongamento; os tres binarios, que agora consideramos reduzir-se-hão a dous  $(OC, Z_{iii})$ ,  $(OA', X)$ , cujos braços  $OC$ ,  $OA'$  não sendo parallelas, não póde dar-se o equilibrio. Se porém  $X_{iii}$ ,  $Y_{iii}$  fossem iguaes e contrarias, os tres binarios se reduzirão a dous  $(OC, Z_{iii})$ ,  $(AB, X_{iii})$ , e não sendo parallelas  $OC$ ,  $AB$ , tambem se não podia verificar o equilibrio supposto: logo forçosamente  $X_{iii}=Y_{iii}=Z_{iii}=0$ , e por conseguinte conclue-se que dadas as direcções divergentes no espaço dos braços de tres binarios resultantes de um systema qualquer de forças gyranes destituido de resultante, ficão desde logo fixadas as direcções, e sentidos das forças, e os momentos maximos de cada um dos tres binarios.

158. Se dous grupos de tres binarios gyranes, em cada um dos quaes as forças são divergentes no espaço, forem equivalentes, e as forças de um dos grupos forem respectivamente parallelas ás do outro, os braços correspondentes serão parallelas, e no mesmo sentido, e os momentos maximos serão correspondentemente iguaes nos dous grupos.

Mudem-se os pontos d'applicação das forças de um dos grupos, de modo que sem alterar os momentos maximos, e a direcção e sentido das forças de cada binario, venhão a ser iguaes as forças respectivamente parallelas e do mesmo sentido nos dous grupos; reunindo n'uma origem commun  $O$  todos os extremos correspondentes dos braços, teremos os dous systemas equivalentes  $(OA, X_i)$ ,  $(OB, Y_i)$ ,  $(OC, Z_i)$ , e  $(OA', X_i)$ ,  $(OB', Y_i)$ ,  $(OC', Z_i)$ ; tomando em sentido contrario as forças do segundo grupo haverá equilibrio em todas as configurações nos tres binarios  $(AA', X_i)$ ,  $(BB', Y_i)$ ,  $(CC', Z_i)$ .

Supponhamos por um momento que não é zero nenhum dos tres braços  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ .

Se esses braços fossem todos divergentes, o equilibrio seria impossivel, não sendo  $0 = X_i = Y_i = Z_i$ , (§ 156). Se *vg.*  $AA'$ ,  $BB'$  fossem parallellos, e não parallellos a  $CC'$ , o equilibrio era ainda impossivel, pois que o systema se reduziria a dous binarios de braços não parallellos.

Finalmente se os tres braços  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  fossem parallellos, suppondo que os respectivos binarios se transformarão em outros  $(A, A', X_{ii})$ ,  $(B, B', Y_{ii})$ ,  $(C, C', Z_{ii})$ , cujos braços tem direcções identicas ás primeiras, e é  $A, A' = B, B' = C, C'$ , compondo estes tres binarios n'um só, as forças respectivas  $X$ ,  $-X$  não poderiam ser nullas, visto que cada uma dellas é resultante de tres forças  $X_{ii}$ ,  $Y_{ii}$ ,  $Z_{ii}$  parallelas a  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ , as quaes são divergentes, e não parallelas todas tres a um só plano; logo tambem neste caso o equilibrio é impossivel.

Desta enumeração conclue-se forçosamente, que só é admissivel a hypothese de se aniquilarem simultaneamente os tres braços  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ; por quanto se *vg.* fosse unicamente  $AA' = 0$ , haveria equilibrio constantemente nos dous binarios  $(BB', Y)$ ,  $(CC', Z)$ , o que é impossivel (§ 21); e se fosse  $AA' = BB' = 0$ , teriamos  $CC'.Z_i = 0$ , donde  $CC' = 0$ . Fica pois demonstrado completamente o theorema, que enunciámos.

159. Tres binarios gyranes cujos braços, e cujas forças são divergentes no espaço, nunca se podem reduzir nem a um só, nem a dous binarios gyranes.

Se os binarios gyranes  $(OA, X_i)$ ,  $(OB, Y_i)$ ,  $(OC, Z_i)$  podessem reduzir-se a um só binario gyranes  $(OM, X)$ , como a força  $X$  se póde decompor em tres forças parallelas gyranes cujos centros existão nos braços  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , se  $OM$  não for parallelas a nenhuma destas linhas, nem ao plano de duas quaesquer dellas; ou se pode decompor em só duas forças cujos centros existão *vg.* em  $OA$ ,  $OB$ , se  $OM$  for parallelas ao plano dessas linhas; ou finalmente  $X$  se acha logo applicada *vg.* ao braço  $OA$ ; nessas tres hypotheses teriamos o grupo dos tres binarios dados equivalente a outro grupo cujos braços tem correspondentemente as direcções dos primeiros, sendo no segundo grupo nullos um, ou dous dos momentos maximos (quando  $OM$  for parallelas ao plano de dous dos braços  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , ou a um

delles) o que não acontece no primeiro grupo; ou sendo as forças no segundo grupo não correspondentemente parallelas ás do primeiro (quando  $OM$  não for parallelo a nenhum dos tres braços dados, nem ao plano de dous quaesquer) pois que as forças  $X_i, Y_i, Z_i$  não são simultaneamente parallelas ás componentes de  $X$  parallelas a esta ultima: ora segundo vimos (§ 157) é impossivel a equivalencia nos dous grupos não havendo correspondentemente em ambos parallelismo das forças, e igualdade dos momentos maximos.

Tambem não podemos suppor que os tres binarios dados equivalam a só dous binarios gyranes ( $OM, X$ ), ( $ON, Y$ ); por quanto decompondo as forças  $X, Y$  de cada um destes binarios em forças parallelas applicadas aos braços  $OA, OB, OC$ , e compondo os binarios que tem os braços na mesma direcção, os tres binarios que resultão terão forças ou nullas, ou parallelas ao plano determinado pelas direcções de  $X, Y$ ; e como  $X_i, Y_i, Z_i$  não são simultaneamente parallelas a esse plano, e nenhuma dessas forças é nulla, não póde em nenhum dos casos indicados haver equivalencia, entre os tres binarios dados, e os tres em que se decompozirão ( $OM, X$ ), ( $ON, Y$ ).

160. Para obter todos os systemas de tres binarios resultantes que equivalam a um systema qualquer de forças gyranes no espaço e destituido de resultante, devemos pois (§ 159) fazer a redução dando aos tres eixos  $OX, OY, OZ$ , aos quaes devem ser parallelas as forças dos tres binarios resultantes, todas as direcções imaginaveis no espaço. Para cada posição daquelles eixos, fica fixada a direcção e sentido dos braços dos binarios resultantes, bem como os seus momentos maximos. Os tres binarios resultantes de cada um destes systemas serão sempre irreduziveis (§§ 156, 159), se o forem em relação a uma determinada situação dos eixos de redução; hypothese que por em quanto admittiremos. Indagaremos pois todas as transformações, que póde soffrer o systema dos tres binarios resultantes, suppondo que os eixos são rectangulares, e que podem tomar todas as direcções no espaço.

Para uma posição qualquer dos eixos as forças dadas  $P, P', P''$  etc. reduzem-se a seis grupos  $\Sigma X, -\Sigma X, \Sigma Y, -\Sigma Y, \Sigma Z, -\Sigma Z$  de forças respectivamente parallelas aos eixos; a distancia dos dous centros das resultan-

tes de cada dous grupos correspondentes dá a grandeza do braço do binario resultante respectivo; supponhamos reunidos na origem  $O$  os extremos de todos os braços a que correspondem as componentes totaes negativas.

Se dermos ao systema d'eixos outra posição  $OX', OY', OZ'$ , e fizermos uma decomposição analogá, os grupos re-

spectivos  $\Sigma \dot{X}$ ,  $-\Sigma \dot{X}$ ,  $\Sigma \dot{Y}$ ,  $-\Sigma \dot{Y}$ ,  $\Sigma \dot{Z}$ ,  $-\dot{Z}$  determinarão as grandezas e posições de tres binarios diversos dos primeiros.

Sejão no primeiro caso  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$  os braços dos tres binarios resultantes;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  os momentos maximos correspondentes; e sejão  $\dot{m}$ ,  $\dot{m}'$ ,  $\dot{m}''$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  as quantidades

analogas no segundo caso; as formulas seguintes nos darão as grandezas dos momentos maximos, e as direcções dos braços, em relação aos dous systemas d'eixos respectivos

$$A = \sqrt{\Sigma^2 x \dot{X} + \Sigma^2 y \dot{X} + \Sigma^2 z \dot{X}}; B = \sqrt{\Sigma^2 x \dot{Y} + \Sigma^2 y \dot{Y} + \Sigma^2 z \dot{Y}}; C = \sqrt{\Sigma^2 x \dot{Z} + \Sigma^2 y \dot{Z} + \Sigma^2 z \dot{Z}} \dots (165)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } mX &= \Sigma x \dot{X} : A; \text{Cos } mY = \Sigma y \dot{X} : A; \text{Cos } mZ = \Sigma z \dot{X} : A \\ \text{Cos } m'X &= \Sigma x \dot{Y} : B; \text{Cos } m'Y = \Sigma y \dot{Y} : B; \text{Cos } m'Z = \Sigma z \dot{Y} : B \\ \text{Cos } m''X &= \Sigma x \dot{Z} : C; \text{Cos } m''Y = \Sigma y \dot{Z} : C; \text{Cos } m''Z = \Sigma z \dot{Z} : C \end{aligned} \right\} \dots (166)$$

$$A' = \sqrt{\Sigma^2 x \dot{X} + \Sigma^2 y \dot{X} + \Sigma^2 z \dot{X}}; B' = \sqrt{\Sigma^2 x \dot{Y} + \Sigma^2 y \dot{Y} + \Sigma^2 z \dot{Y}}; C' = \sqrt{\Sigma^2 x \dot{Z} + \Sigma^2 y \dot{Z} + \Sigma^2 z \dot{Z}} \dots (167)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } mX' &= \Sigma x \dot{X} : A'; \text{Cos } mY' = \Sigma y \dot{X} : A'; \text{Cos } mZ' = \Sigma z \dot{X} : A' \\ \text{Cos } m'X' &= \Sigma x \dot{Y} : B'; \text{Cos } m'Y' = \Sigma y \dot{Y} : B'; \text{Cos } m'Z' = \Sigma z \dot{Y} : B' \\ \text{Cos } m''X' &= \Sigma x \dot{Z} : C'; \text{Cos } m''Y' = \Sigma y \dot{Z} : C'; \text{Cos } m''Z' = \Sigma z \dot{Z} : C' \end{aligned} \right\} \dots (168)$$

Estas formulas não mudão deslocando-se de qualquer modo a origem  $O$ .

161. Supponhamos agora que nas direcções dos braços  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $\dot{m}$ ,  $\dot{m}'$ ,  $\dot{m}''$ , a partir da origem  $O$ , se marcão

as grandezas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ; demonstraremos que todos os systemas de rectas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  etc.,

que se obtem dando aos eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  todas as direcções no espaço, são todos os systemas de semidiametros conjugados de um mesmo ellipsoide.

Para esse fim determinemos em primeiro logar a somma dos quadrados das projecções de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sobre os tres eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Teremos pois:

$$\begin{aligned} & \text{Projecções de} \dots\dots A', \dots\dots B', \dots\dots C', \\ & \text{no eixo } OX' \dots\dots \Sigma \dot{x}X \dots\dots \Sigma \dot{x}Y \dots\dots \Sigma \dot{x}Z \\ & \text{no eixo } OY' \dots\dots \Sigma \dot{y}X \dots\dots \Sigma \dot{y}Y \dots\dots \Sigma \dot{y}Z \\ & \text{no eixo } OZ' \dots\dots \Sigma \dot{z}X \dots\dots \Sigma \dot{z}Y \dots\dots \Sigma \dot{z}Z \end{aligned}$$

e por conseguinte, suppondo que cada um dos eixos  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  faz respectivamente com os tres eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  angulos cujos cosenos são  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ ,  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ , concluiremos serem as projecções de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$

$$\begin{aligned} \text{no eixo } OX \dots a \Sigma \dot{x}X + b \Sigma \dot{y}X + c \Sigma \dot{z}X \dots a \Sigma \dot{x}Y + b \Sigma \dot{y}Y + c \Sigma \dot{z}Y \dots a \Sigma \dot{x}Z + b \Sigma \dot{y}Z + c \Sigma \dot{z}Z \\ \text{no eixo } OY \dots a' \Sigma \dot{x}X + b' \Sigma \dot{y}X + c' \Sigma \dot{z}X \dots a' \Sigma \dot{x}Y + b' \Sigma \dot{y}Y + c' \Sigma \dot{z}Y \dots a' \Sigma \dot{x}Z + b' \Sigma \dot{y}Z + c' \Sigma \dot{z}Z \\ \text{no eixo } OZ \dots a'' \Sigma \dot{x}X + b'' \Sigma \dot{y}X + c'' \Sigma \dot{z}X \dots a'' \Sigma \dot{x}Y + b'' \Sigma \dot{y}Y + c'' \Sigma \dot{z}Y \dots a'' \Sigma \dot{x}Z + b'' \Sigma \dot{y}Z + c'' \Sigma \dot{z}Z \end{aligned}$$

valores que em presença das equações

$$\left. \begin{aligned} x &= a \dot{x} + b \dot{y} + c \dot{z} \\ y &= a' \dot{x} + b' \dot{y} + c' \dot{z} \\ z &= a'' \dot{x} + b'' \dot{y} + c'' \dot{z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (169)$$

se reduzem a

$$\left. \begin{aligned} A' \text{ Cos } A'X &= \Sigma \dot{x}X; B' \text{ Cos } B'X = \Sigma \dot{x}Y; C' \text{ Cos } C'X = \Sigma \dot{x}Z \\ A' \text{ Cos } A'Y &= \Sigma \dot{y}X; B' \text{ Cos } B'Y = \Sigma \dot{y}Y; C' \text{ Cos } C'Y = \Sigma \dot{y}Z \\ A' \text{ Cos } A'Z &= \Sigma \dot{z}X; B' \text{ Cos } B'Z = \Sigma \dot{z}Y; C' \text{ Cos } C'Z = \Sigma \dot{z}Z \end{aligned} \right\} \dots (170),$$

Estas equações podião ser estabelecidas immediatamente pelos mesmos principios de que deduzimos as equações (168), fazendo as projecções sobre os eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . As equações (170), em presença das equações

$$\left. \begin{aligned} X &= aX + a'Y + a''Z \\ Y &= bX + b'Y + b''Z \\ Z &= cX + c'Y + c''Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (171)$$

mutuam-se em

$$\left. \begin{aligned} A' \text{Cos } A' X &= a \Sigma x X + a' \Sigma x Y + a'' \Sigma x Z; B' \text{Cos } B' X = b \Sigma x X + b' \Sigma x Y + b'' \Sigma x Z; C' \text{Cos } C' X = c \Sigma x X + c' \Sigma x Y + c'' \Sigma x Z \\ A' \text{Cos } A' Y &= a \Sigma y X + a' \Sigma y Y + a'' \Sigma y Z; B' \text{Cos } B' Y = b \Sigma y X + b' \Sigma y Y + b'' \Sigma y Z; C' \text{Cos } C' Y = c \Sigma y X + c' \Sigma y Y + c'' \Sigma y Z \\ A' \text{Cos } A' Z &= a \Sigma z X + a' \Sigma z Y + a'' \Sigma z Z; B' \text{Cos } B' Z = b \Sigma z X + b' \Sigma z Y + b'' \Sigma z Z; C' \text{Cos } C' Z = c \Sigma z X + c' \Sigma z Y + c'' \Sigma z Z \end{aligned} \right\} (172).$$

Formando as sommás dos quadrados das projecções relativas a cada um dos eixos, e reduzindo acharemos facilmente

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \text{Cos}^2 A' X + B'^2 \text{Cos}^2 B' X + C'^2 \text{Cos}^2 C' X &= \Sigma^2 x X + \Sigma^2 x Y + \Sigma^2 x Z = A_i^2 \text{Cos}^2 A_i X + B_i^2 \text{Cos}^2 B_i X + C_i^2 \text{Cos}^2 C_i X \\ A'^2 \text{Cos}^2 A' Y + B'^2 \text{Cos}^2 B' Y + C'^2 \text{Cos}^2 C' Y &= \Sigma^2 y X + \Sigma^2 y Y + \Sigma^2 y Z = A_i^2 \text{Cos}^2 A_i Y + B_i^2 \text{Cos}^2 B_i Y + C_i^2 \text{Cos}^2 C_i Y \\ A'^2 \text{Cos}^2 A' Z + B'^2 \text{Cos}^2 B' Z + C'^2 \text{Cos}^2 C' Z &= \Sigma^2 z X + \Sigma^2 z Y + \Sigma^2 z Z = A_i^2 \text{Cos}^2 A_i Z + B_i^2 \text{Cos}^2 B_i Z + C_i^2 \text{Cos}^2 C_i Z \end{aligned} \right\} (173).$$

Estas equações mostram que é constante a somma dos quadrados das projecções de qualquer systema de tres linhas  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sobre cada um de tres eixos rectangulares fixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ .

Das equações (170) conclue-se tambem

$$\begin{aligned} A'^2 \text{Cos } A' X \text{ Cos } A' Y + B'^2 \text{Cos } B' X \text{ Cos } B' Y + C'^2 \text{Cos } C' X \text{ Cos } C' Y &= \Sigma x \dot{X} \Sigma y \dot{X} + \Sigma x \dot{Y} \Sigma y \dot{Y} + \Sigma x \dot{Z} \Sigma y \dot{Z} \\ A'^2 \text{Cos } A' Y \text{ Cos } A' Z + B'^2 \text{Cos } B' Y \text{ Cos } B' Z + C'^2 \text{Cos } C' Y \text{ Cos } C' Z &= \Sigma x \dot{X} \Sigma z \dot{X} + \Sigma x \dot{Y} \Sigma z \dot{Y} + \Sigma x \dot{Z} \Sigma z \dot{Z} \\ A'^2 \text{Cos } A' X \text{ Cos } A' Z + B'^2 \text{Cos } B' X \text{ Cos } B' Z + C'^2 \text{Cos } C' X \text{ Cos } C' Z &= \Sigma y \dot{X} \Sigma z \dot{X} + \Sigma y \dot{Y} \Sigma z \dot{Y} + \Sigma y \dot{Z} \Sigma z \dot{Z} \end{aligned}$$

ou empregando os valores (172), e reduzindo

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \text{Cos } A'X \text{Cos } A'Y + B'^2 \text{Cos } B'X \text{Cos } B'Y + C'^2 \text{Cos } C'X \text{Cos } C'Y &= \Sigma x X \Sigma y Y + \Sigma x Y \Sigma y X + \Sigma x Z \Sigma y Z \\ A'^2 \text{Cos } A'X \text{Cos } A'Z + B'^2 \text{Cos } B'X \text{Cos } B'Z + C'^2 \text{Cos } C'X \text{Cos } C'Z &= \Sigma x X \Sigma z Z + \Sigma x Y \Sigma z Y + \Sigma x Z \Sigma z X \\ A'^2 \text{Cos } A'Y \text{Cos } A'Z + B'^2 \text{Cos } B'Y \text{Cos } B'Z + C'^2 \text{Cos } C'Y \text{Cos } C'Z &= \Sigma y X \Sigma z X + \Sigma y Y \Sigma z Y + \Sigma y Z \Sigma z Z \end{aligned} \right\} (174).$$

Por estas equações se conhece que são constantes as sommas que constituem os primeiros membros para qualquer systema  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

Como nas fórmulas (173, 174) seja arbitraria a posição dos eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , supponhamos que estes se tomarão na direcção dos semieixos do ellipsoide cujos semidiametros conjugados são  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ; teremos, como é sabido pela Geometria analytica, chamando  $A$ ,  $B$ ,  $C$  os semieixos desse ellipsoide:

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \text{Cos}^2 A'X + B'^2 \text{Cos}^2 B'X + C'^2 \text{Cos}^2 C'X &= A^2 \\ A'^2 \text{Cos}^2 A'Y + B'^2 \text{Cos}^2 B'Y + C'^2 \text{Cos}^2 C'Y &= B^2 \\ A'^2 \text{Cos}^2 A'Z + B'^2 \text{Cos}^2 B'Z + C'^2 \text{Cos}^2 C'Z &= C^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (175)$$

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \text{Cos } A'X \text{Cos } A'Y + B'^2 \text{Cos } B'X \text{Cos } B'Y + C'^2 \text{Cos } C'X \text{Cos } C'Y &= 0 \\ A'^2 \text{Cos } A'X \text{Cos } A'Z + B'^2 \text{Cos } B'X \text{Cos } B'Z + C'^2 \text{Cos } C'X \text{Cos } C'Z &= 0 \\ A'^2 \text{Cos } A'Y \text{Cos } A'Z + B'^2 \text{Cos } B'Y \text{Cos } B'Z + C'^2 \text{Cos } C'Y \text{Cos } C'Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (176)$$

E como vimos serem constantes as sommas, que constituem os primeiros membros destas equações para todos os systemas  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , etc., segue-se que todos elles são systemas de semidiametros conjugados no ellipsoide cujos semieixos são  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Vê-se pois que as direcções dos braços de todos os systemas equivalentes de tres binarios gyrantes são dadas pelos systemas de semidiametros conjugados de um mesmo ellipsoide; e que as grandezas destes semidiametros representam os momentos maximos dos binarios correspondentes. Chamaremos *ellipsoide de redução*, esse que possui a indicada propriedade.

162. Para completar o theorema do paragrapho precedente cumpre-nos demonstrar reciprocamente, que se tivermos para a posição  $OXYZ$  dos eixos de decomposição os tres semidiametros conjugados  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  do ellipsoide de redução, será possível sempre achar outra posição

$OX'Y'Z'$  desses eixos tal, que fazendo em relação a elles a decomposição das forças dadas, venhamos a ter um systema qualquer dado  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de tres semidiametros conjugados do mesmo ellipsoide de redução.

Antes de demonstrarmos o theorema enunciado convem indicar a restricção a que elle é sujeito. Se um systema de eixos de redução der os tres semidiametros  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , podem estes constituir ou um *systema directo*, ou um *systema inverso*; empregaremos a primeira denominação quando uma daquellas tres linhas vg.  $A_i$  está situada para um lado tal do plano determinado por  $B_i$ ,  $C_i$ , que em relação a  $A_i$  é  $< 180^\circ$  a rotação directa necessaria para se passar de  $B_i$  para  $C_i$ : dada essa hypothese, em relação a  $B_i$  será tambem  $< 180^\circ$  a rotação directa de  $C_i$  para  $A_i$ ; e semelhantemente se dirá de  $C_i$ . O systema chamar-se-ha *inverso* quando as indicadas rotações menores que  $180^\circ$  forem todas inversas. O systema d'eixos de redução deve sempre suppor-se *directo*.

Na transição pois de um grupo de semidiametros  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  para outro qualquer  $A'_i$ ,  $B'_i$ ,  $C'_i$ , é forçoso que ambos elles seão do systema *directo*, ou do systema *inverso*.

E' com esta restricção que deve ser entendida a proposição enunciada. A demonstração della poderia deduzir-se analyticamente das equações (172); chegaremos porêem mais facilmente ao mesmo resultado pelo processo seguinte, que servirá tambem para provar a proposição *directa*.

Admittiremos a hypothese de que os dous grupos de semidiametros conjugados são ambos do systema *directo*, e ver-se-ha que as transformações, que nelles faremos, dão tambem systemas *directos*. Semelhantemente se diria se os dous grupos de semidiametros conjugados fossem ambos do systema *inverso*.

Supponhamos que a intersecção dos planos de  $A_i$ ,  $B_i$ , e de  $A'_i$ ,  $B'_i$  dá no ellipsoide o semidiametro  $A_{ii}$ ; pelo que demonstrámos (§ 71) vê-se que fazendo gyrar o systema de eixos de decomposição  $OXYZ$  sobre  $OZ$  passaremos dos tres semidiametros conjugados  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  para os tres  $A_{ii}$ ,  $B_{ii}$ ,  $C_{ii}$ ; e como existirá o systema  $(A'_{ii}, B'_{ii}, C'_{ii})$  no ellipsoide  $(A_i, B_i, C_i)$ ,  $(A'_i, B'_i, C'_i)$ , vê-se que os dous systemas do mesmo ellipsoide  $(A_{ii}, B_{ii}, C_{ii})$ ,  $(A'_{ii}, B'_{ii}, C'_{ii})$  tendo commum o semidiametro  $A_{ii}$ , os quatro  $B_{ii}$ ,  $C_{ii}$ ,  $B'_{ii}$ ,  $C'_{ii}$  deverão existir no mesmo plano, sendo os dous primeiros,

e os dous ultimos semidiametros conjugados da mesma ellipse; logo se forem  $OY''$ ,  $OZ$  os eixos de decomposição correspondentes a  $B''$ ,  $C'$ , passar-se-ha deste systema para  $B'$ ,  $C'$  fazendo gyrrar convenientemente os eixos  $OY''$ ,  $OZ$  no seu plano, devendo-se advertir que em todas as transformações, que temos indicado, os eixos de decomposição conservão-se sempre rectangulares. Reconhecendo-se em vista do exposto que por meio de rotações dos eixos de decomposição se passa do systema  $(A'', B'', C')$  para o systema  $(A'', B', C')$ , e deste para  $(A', B', C')$ , concluiremos finalmente que por deslocamentos successivos do systema de eixos de decomposição  $OXYZ$  faremos a transição de cada um dos seguintes systemas para o immediato:

$$(A', B', C'), (A'', B'', C'), (A'', B', C'), (A', B', C'),$$

e por conseguinte um deslocamento total de  $OXYZ$  dará a transição do primeiro systema para o ultimo.

Reciprocamente se demonstra que se os eixos rectangulares de decomposição  $OXYZ$  derem os tres semidiametros  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  do ellipsoide de redução, o systema  $OX'Y'Z'$ , tambem rectangular, dará um grupo de tres semidiametros conjugados do mesmo ellipsoide.

Com effeito suppondo que, pela rotação sobre  $OZ$ , se passa do systema  $OXYZ$  para  $OX''Y''Z$  em que  $OX''$  é a intersecção dos planos  $OXY$ ,  $OX'Y'$ ; e que depois pela rotação sobre  $OX''$  se passa de  $OX''Y''Z$  para  $OX''Y'Z'$ ; e finalmente deste se passa para  $OX'Y'Z'$ , teremos a seguinte correspondencia entre os systemas d'eixos, e os binarios maximos resultantes respectivos:

$$OXYZ, \quad OX''Y''Z, \quad OX''Y'Z', \quad OX'Y'Z'$$

$$(A', B', C'), (A'', B'', C'), (A'', B', C'), (A', B', C')$$

Ora pelo (§ 70) conclue-se que  $(A', B')$ ,  $(A'', B'')$  são dous systemas de semidiametros conjugados da mesma ellipse; logo  $(A', B', C')$ ,  $(A'', B'', C')$  são systemas de semidiametros conjugados do mesmo ellipsoide, ao qual semelhantemente se demonstrará pertencerem os systemas  $(A', B', C')$ ,  $(A', B', C')$ .

163. Se somarmos os quadrados das equações da primeira columna (172), teremos

$$A'^2 = a^2 A_i^2 + a'^2 B_i^2 + a''^2 C_i^2 + 2aa' (\Sigma x X \Sigma x Y + \Sigma y X \Sigma y Y + \Sigma z X \Sigma z Y) \\ + 2aa'' (\Sigma x X \Sigma x Z + \Sigma y X \Sigma y Z + \Sigma z X \Sigma z Z) \\ + 2a'a'' (\Sigma x Y \Sigma x Z + \Sigma y Y \Sigma y Z + \Sigma z Y \Sigma z Z);$$

deduzindo equações analogas das outras duas columnas de (172), e advertindo que pelas equações (166) é

$$\Sigma x X \Sigma x Y + \Sigma y X \Sigma y Y + \Sigma z X \Sigma z Z = A_i B_i (\text{Cos } A_i X \text{Cos } B_i X + \text{Cos } A_i Y \text{Cos } B_i Y + \text{Cos } A_i Z \text{Cos } B_i Z) = A_i B_i \text{Cos } A_i B_i; \\ \Sigma x X \Sigma x Z + \Sigma y X \Sigma y Z + \Sigma z X \Sigma z Z = A_i C_i \text{Cos } A_i C_i; \text{ etc.}$$

obteremos finalmente

$$\left. \begin{aligned} A'^2 &= a^2 A_i^2 + a'^2 B_i^2 + a''^2 C_i^2 + 2aa' A_i B_i \text{Cos } A_i B_i + 2aa'' A_i C_i \text{Cos } A_i C_i + 2a'a'' B_i C_i \text{Cos } B_i C_i \\ B'^2 &= b^2 A_i^2 + b'^2 B_i^2 + b''^2 C_i^2 + 2bb' A_i B_i \text{Cos } A_i B_i + 2bb'' A_i C_i \text{Cos } A_i C_i + 2b'b'' B_i C_i \text{Cos } B_i C_i \\ C'^2 &= c^2 A_i^2 + c'^2 B_i^2 + c''^2 C_i^2 + 2cc' A_i B_i \text{Cos } A_i B_i + 2cc'' A_i C_i \text{Cos } A_i C_i + 2c'c'' B_i C_i \text{Cos } B_i C_i \end{aligned} \right\} \dots\dots (177).$$

Estas equações dão-nos os tres momentos maximos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de um grupo de binarios equivalente ao grupo  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , suppondo que deste se passou para aquelle fazendo rotar o systema d'eixos de redução da posição  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  para a posição  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$ , ligada á precedente pelos cosenos  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $b$ ,  $b'$ , etc.

Se suppozermos que o systema  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  corresponde aos tres semieixos do ellipsoide de redução, teremos

$$\text{Cos } AB = \text{Cos } AC = \text{Cos } BC = 0;$$

e as equações (177) reduzem-se a

$$\left. \begin{aligned} A'^2 &= a^2 A^2 + a'^2 B^2 + a''^2 C^2 \\ B'^2 &= b^2 A^2 + b'^2 B^2 + b''^2 C^2 \\ C'^2 &= c^2 A^2 + c'^2 B^2 + c''^2 C^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (178)$$

equações que nos dão, por meio da posição dos eixos móveis  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  em relação aos eixos fixos  $OX$ ,  $OY$ ,

$OZ$ , as grandezas dos momentos maximos  $A', B', C'$  expressas nos momentos maximos  $A, B, C$  relativas aos semi-eixos, momentos que chamaremos *principaes*, denominando tambem *principaes* os eixos, que coincidem respectivamente com as direcções  $A, B, C$ . As equações (178) dar-nos-hão pela eliminação o systema  $A, B, C$  por meio do systema  $A', B', C'$ .

164. Para completar a representação de todas as transformações de que é susceptivel um systema de tres binarios gyrantes irreduziveis, cujas forças são orthogonaes, resta-nos unicamente determinar a ligação muito simples, que ha entre os cosenos  $a, a'$ , etc. relativos á rotação dos eixos de decomposição, e os cosenos  $\text{Cos } A'A, \text{Cos } A'B$ , etc. relativos á rotação dos braços dos binarios resultantes. Para obter essa ligação poderíamos, imitando o processo empregado quando tractámos da ellipse de reduccão, comparar os valores desses cosenos deduzidos das equações (175, 176), combinadas com as relações

$$1 = \text{Cos}^2 A'A + \text{Cos}^2 A'B + \text{Cos}^2 A'C = \text{Cos}^2 B'A + \text{Cos}^2 B'B + \text{Cos}^2 B'C = \text{etc.}$$

e das equações (178) combinadas com as relações conhecidas dos nove cosenos  $a, a'$ , etc.

Em vez de empregar esse methodo, que seria muito longo, procederemos da seguinte maneira.

As nove equações (172) dar-nos-hão pela eliminação, operando separadamente sobre cada um dos tres grupos verticaes, os valores de  $a, a', a'', b$ , etc. expressos nos parametros de rotação relativos aos eixos de reduccão  $OX, OY, OZ$ .

O denominador commum dessas nove incognitas é

$$\Sigma xX \Sigma yY \Sigma zZ - \Sigma xX \Sigma yYZ \Sigma zY + \Sigma yX \Sigma zYZ \Sigma xZ - \text{etc.}$$

o qual pelas formulas (166) se muda em

$$A, B, C, (\text{Cos } mX (\text{Cos } m'Y \text{Cos } m''Z - \text{Cos } m'Z \text{Cos } m''Y) + \text{Cos } mY (\text{Cos } m'Z \text{Cos } m''X - \text{Cos } m'X \text{Cos } m''Z) \\ + \text{Cos } mZ (\text{Cos } m'X \text{Cos } m''Y - \text{Cos } m'Y \text{Cos } m''X));$$

se chamarmos  $\lambda, \mu, \nu$  os tres angulos que faz com os tres eixos  $OX, OY, OZ$  a normal ao plano  $B, OC$ , tomando nessa normal o sentido a respeito do qual é  $< 180^\circ$  a rotação

directa necessaria para se passar de  $B_i$  para  $C_i$ , a formula precedente reduz-se a

$$A_i B_i C_i \text{ Sen } B_i C_i (\text{Cos } mX \text{ Cos } \lambda + \text{Cos } mY \text{ Cos } \mu + \text{Cos } mZ \text{ Cos } \nu);$$

e se fizermos  $B_i C_i \text{ Sen } B_i C_i = T$  area do parallelogramo determinado por  $B_i$ ,  $C_i$ , e representarmos por  $A_i n T$  o angulo de  $A_i$  com aquella normal, será o denominador commum das nove incognitas

$$A_i T \text{ Cos } A_i n T;$$

esta expressão dá exactamente o volumê do parallelipêdo, que tem  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  por arestas contiguas, se for directo este systema; e se for inverso, a dita expressão será o indicado volume tomado com signal negativo. Vê-se por tanto que o denominador commum das nove incognitas é

$$\pm ABC,$$

conforme  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  for systema directo, ou inverso.

Teremos por conseguinte o valor, vg. de

$$a = \frac{A \text{ Cos } A' X (\Sigma y Y \Sigma z Z - \Sigma x Y \Sigma y Z) + A' \text{ Cos } A' Y (\Sigma x Y \Sigma z Z - \Sigma x Y \Sigma z Z) + A' \text{ Cos } A' Z (\Sigma x Y \Sigma y Z - \Sigma y Y \Sigma z Z)}{\pm ABC}$$

ou

$$a = \pm \frac{A' B_i C_i}{ABC} (\text{Cos } A' X (\text{Cos } m' Y \text{ Cos } m'' Z - \text{Cos } m' Z \text{ Cos } m'' Y)$$

$$+ \text{Cos } A' Y (\text{Cos } m' Z \text{ Cos } m'' X - \text{Cos } m' X \text{ Cos } m'' Z) + \text{etc.}),$$

ou, por uma transformação analogo á que fizemos no denominador commum,

$$a = \pm \frac{A'}{ABC} T \text{ Cos } A' n T.$$

No primeiro grupo vertical das equações (172) se reconhece que  $A'$  deve entrar semelhantemente nos tres valores de  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ; e vê-se tambem que destes valores se passa para  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ , e para  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ , mudando successivamente  $A'$  em  $B'$ ;

e em  $C'$ ; teremos pois finalmente, designando por  $U, V$  os parallelogramos  $A_1C_1$ ,  $Sen A_1C_1$ ,  $A_1B_1$ ,  $Sen A_1B_1$ ,

$$a = \pm \frac{A'}{ABC} T \text{ Cos } A'nT; a' = \pm \frac{A'}{ABC} U \text{ Cos } A'nU; a'' = \pm \frac{A'}{ABC} V \text{ Cos } A'nV;$$

$$b = \pm \frac{B'}{ABC} T \text{ Cos } B'nT; b' = \pm \frac{B'}{ABC} U \text{ Cos } B'nU; b'' = \pm \frac{B'}{ABC} V \text{ Cos } B'nV;$$

$$c = \pm \frac{C'}{ABC} T \text{ Cos } C'nT; c' = \pm \frac{C'}{ABC} U \text{ Cos } C'nU; c'' = \pm \frac{C'}{ABC} V \text{ Cos } C'nV;$$

tomando-se nestas equações o signal  $+$ , ou  $-$  conforme o systema  $A_1, B_1, C_1$ , e por conseguinte  $A, B, C$  forem directos, ou inversos, e tendo as tres normaes aos planos  $T, U, V$  o sentido a respeito do qual é  $< 180^\circ$  a rotação directa de  $B_1$  para  $C_1$ , de  $C_1$  para  $A_1$ , e de  $A_1$  para  $B_1$ .

As formulas precedentes podem transformar-se em outras mais simples, e em que não haja a restricção indicada no sentido das tres normaes, nem a ambiguidade do signal  $\pm$ . Com effeito sendo, nos systemas directos, ou inversos

$$\pm ABC = TA_1 \text{ Cos } A_1nT = UB_1 \text{ Cos } B_1nU = VC_1 \text{ Cos } C_1nV,$$

as formulas obtidas mudar-se-hão em

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{A' \text{ Cos } A'nB_1C_1}{A_1 \text{ Cos } A_1nB_1C_1}; a' = \frac{A' \text{ Cos } A'nC_1A_1}{B_1 \text{ Cos } B_1nC_1A_1}; a'' = \frac{A' \text{ Cos } A'nA_1B_1}{C_1 \text{ Cos } C_1nA_1B_1} \\ b &= \frac{B' \text{ Cos } B'nB_1C_1}{A_1 \text{ Cos } A_1nB_1C_1}; b' = \frac{B' \text{ Cos } B'nC_1A_1}{B_1 \text{ Cos } B_1nC_1A_1}; b'' = \frac{B' \text{ Cos } B'nA_1B_1}{C_1 \text{ Cos } C_1nA_1B_1} \\ c &= \frac{C' \text{ Cos } C'nB_1C_1}{A_1 \text{ Cos } A_1nB_1C_1}; c' = \frac{C' \text{ Cos } C'nC_1A_1}{B_1 \text{ Cos } B_1nC_1A_1}; c'' = \frac{C' \text{ Cos } C'nA_1B_1}{C_1 \text{ Cos } C_1nA_1B_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots (179).$$

Estas formulas dão pois a posição do systema de eixos de reducção  $OX'Y'Z'$ , aos quaes correspondem os tres momentos maximos resultantes  $A', B', C'$ , por meio da posição  $OXYZ$ , á qual correspondem os tres momentos  $A_1, B_1, C_1$ . Nos dous termos de cada uma das fracções (179) poder-se-ha tomar qualquer dos sentidos da normal respectiva.

Se supposermos que o systema  $A_1, B_1, C_1$  é o dos tres momentos resultantes principaes  $A, B, C$  as formulas (179) reduzem-se a

$$\left. \begin{aligned} aA &= A' \text{ Cos } A'A; & a'B &= A' \text{ Cos } A'B; & a''C &= A' \text{ Cos } A'C \\ bA &= B' \text{ Cos } B'A; & b'B &= B' \text{ Cos } B'B; & b''C &= B' \text{ Cos } B'C \\ cA &= C' \text{ Cos } C'A; & c'B &= C' \text{ Cos } C'B; & c''C &= C' \text{ Cos } C'C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (180).$$

Estas equações demonstrarião tambem analyticamente a primeira proposição do (§ 162), por quanto é facil de verificar que os valores de  $a, a', a'',$  etc. dados por essas equações satisfazem ás seis equações de condição que ligão esses nove cosenos.

165. As ultimas formulas se chegaria muito mais facilmente, uma vez que supponhamos haver-se já demonstrado, que existem sempre tres eixos  $OX, OY, OZ,$  em relação aos quaes se obtom para momentos maximos resultantes os tres semieixos do ellipsoide de redução.

Os valores de  $a, a', a'', b,$  etc. dados pelas equações (172) não mudão suppondo que nos dous systemas  $A, B, C, A', B', C'$  se passa da configuração, em que se fez a decomposição das forças dadas  $P, P', P'',$  etc. para outra configuração qualquer, visto que essa transição equivale a suppor, que os dous systemas d'eixos  $OXYZ, OX'Y'Z',$  invariavelmente ligados, gyrão em torno de  $O,$  e por consequente conservar-se-hão constantes  $a, a', a'',$  etc. Se imaginarmos pois que se passa para uma configuração, em que as forças positivas  $X_i, Y_i, Z_i,$  applicadas aos extremos não reunidos dos tres braços coincidentes com os semieixos  $A, B, C$  tenham simultanea, e respectivamente as direcções e sentidos desses braços a partir de  $O$  para aquelles extremos; configuração que é sempre possivel quando o systema  $A, B, C$  for directo: ou se este for inverso, imaginando que se passou para a configuração em que  $X_i, Y_i, Z_i$  tem sentidos oppostos aos indicados, teremos nestes dous casos, applicando o signal  $+,$  ou  $-$  a  $A, B, C,$  conforme se verificar o primeiro, ou o segundo:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma xX &= \pm A; & \Sigma yX &= 0; & \Sigma zX &= 0 \\ \Sigma xY &= 0; & \Sigma yY &= \pm B; & \Sigma zY &= 0 \\ \Sigma xZ &= 0; & \Sigma yZ &= 0; & \Sigma zZ &= \pm C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (181)$$

equações que mudão immediatamente (172) em (180), advertindo, que é

$$\text{Cos } A'X = \pm \text{Cos } A'A; \text{Cos } A'Y = \pm \text{Cos } A'B; \text{ etc.}$$

adoptando o signal + nos systemas directos, e — nos inversos. As equações (180) dão por tanto os cosenos  $a, a', a''$ , etc. que determinão a rotação, que o systema de eixos  $OX'Y'Z'$  experimentou para dar o systema de momentos  $A', B', C'$ , suppondo que esses eixos partirão d'uma situação inicial, a respeito da qual a decomposição das forças dadas produziu os tres binarios resultantes principaes, ainda quando nessa situação os braços dos binarios não fossem respectivamente parallelos ás direcções dos eixos.

166. Conheceremos quando o ellipsoide de redução se converte n'uma esphera, estabelecendo para qualquer systema d'eixos  $OX, OY, OZ$ , em relação aos quaes se tenham determinado os parametros de rotação, as equações seguintes:

$$A_i = B_i = C_i; \text{Cos } A_i B_i = \text{Cos } A_i C_i = \text{Cos } B_i C_i = 0;$$

isto é,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^2 x X + \Sigma^2 y Y + \Sigma^2 z Z = \Sigma^2 x Y + \Sigma^2 y Y + \Sigma^2 z Y = \Sigma^2 x Z + \Sigma^2 y Z + \Sigma^2 z Z \\ \Sigma x X \Sigma x Y + \Sigma y X \Sigma y Y + \Sigma z X \Sigma z Y = \Sigma x X \Sigma x Z + \Sigma y X \Sigma y Z + \Sigma z X \Sigma z Z = \Sigma x Y \Sigma x Z + \Sigma y Y \Sigma y Z + \Sigma z Y \Sigma z Z = 0 \end{aligned} \right\} (182)$$

equações que terão semelhantemente logar para qualquer outro systema de eixos de redução.

Quando se verificarem as condições (182) as formulas (180) reduzem-se a

$$a = \text{Cos } A'A; a' = \text{Cos } A'B; a'' = \text{Cos } A'C;$$

$$b = \text{Cos } B'A; b' = \text{Cos } B'B; b'' = \text{Cos } B'C;$$

$$c = \text{Cos } C'A; c' = \text{Cos } C'B; c'' = \text{Cos } C'C;$$

isto é, a situação reciproca de dous systemas de eixos de redução é analogo á situação reciproca dos correspondentes braços dos binarios resultantes.

167. A grandeza e direcção dos tres semidiametros  $A_i, B_i, C_i$ , do ellipsoide de redução, que correspondem aos eixos de decomposição  $OX, OY, OZ$ , e que representão as direcções e sentidos dos braços dos tres binarios resultan-

tes, e os seus momentos maximos, podem determinar-se pela seguinte construcção.

A partir da origem  $O$ , na direcção daquelles eixos, e no sentido designado pelos signaes respectivos, applicuem-se correspondentemente as grandezas  $E, E', E''$ ; a resultante dessas linhas; consideradas como forças, dará  $A_i$  em grandeza e direcção, pois que temos

$$E^2 + E'^2 + E''^2 = A_i^2; \quad E = A_i \cos A_i X; \quad E' = A_i \cos A_i Y; \quad E'' = A_i \cos A_i Z;$$

Semelhantemente será  $B_i$  a resultante das tres forças  $F, F', F''$  applicadas por um modo analogo, e  $C_i$  a resultante de  $G, G', G''$ .

163. Até aqui temos supposto geralmente que os tres binarios resultantes erão irreduziveis; para que isso aconteça é necessario que a construcção precedente não dê algum dos seguintes casos: 1.º Ser zero alguma das tres resultantes  $A_i, B_i, C_i$ ; 2.º Serem duas deilas coincidentes, ou oppostas: 3.º Acharem-se todas situadas no mesmo plano. Neste ultimo caso, estando os tres braços no mesmo plano; um dos binarios resultantes se decompõe em dous, cujos braços coincidem em direcção com os dos outros dous binarios, e por conseguinte o systema de forças dado é reduzivel a dous binarios gyrantes.

Os tres casos de reductibilidade que indicámos, traduzem-se n'uma só condição geometrica, que vem a ser, anniquilar-se o parallelipedeo, que tem por arestas contiguas as tres resultantes, ou semidiametros  $A_i, B_i, C_i$ : essa condição exprime-se analyticamente em virtude do que vimos (§ 164) pela equação

$$EF'G'' - EF''G' + E'F''G - E'FG'' + E''FG' - E''F'G = 0 \dots (183).$$

Se esta equação se verificar para um dado systema de eixos de redução, terá logar para qualquer outro, por quanto tres binarios reduziveis não podem equivaler a tres outros irreduziveis.

Se a equação (183) não se verificar para um dado systema de eixos de redução, os tres binarios correspondentes são irreduziveis, e a mesma equação deixará tambem de ser verdadeira para qualquer outro systema de eixos de redução. Na hypothese actual os tres binarios resultantes

serão do systema directo, ou inverso, conforme for positivo, ou negativo o primeiro membro da equação (183).

169. Indiquemos agora especialmente as condições que devem verificar-se, para que os tres binarios resultantes se possam reduzir a dous, a um só, ou ao equilibrio em todas as configurações. Para que um dos binarios resultantes se aniquile deve ter logar uma das tres condições complexas

$$E = E' = E'' = 0; F = F' = F'' = 0; G = G' = G'' = 0. (184).$$

Verificando-se duas dessas condições complexas, aniquilão-se dous dos binarios resultantes.

Se todas as condições (184) forem satisfeitas, o systema dará o equilibrio em todas as configurações.

Reciprocamente para que se dê o equilibrio em todas as configurações, como as forças  $X_i, Y_i, Z_i$  dos binarios resultantes são divergentes no espaço, é forçoso (§§ 156, 78) que tenhamos

$$A_i = B_i = C_i = 0,$$

donde se conclue

$$E = E' = E'' = F = F' = F'' = G = G' = G'' = 0 \dots \dots \dots (185).$$

Não sendo nullo nenhum dos tres momentos maximos  $A_i, B_i, C_i$ , se duas dessas linhas coincidirem em direcção, os tres binarios resultantes reduzir-se-hão a dous, e verificar-se-ha uma das tres condições complexas

$$\frac{E}{F} = \frac{E'}{F'} = \frac{E''}{F''}; \frac{E}{G} = \frac{E'}{G'} = \frac{E''}{G''}; \frac{F}{G} = \frac{F'}{G'} = \frac{F''}{G''} \dots \dots \dots (186).$$

Se duas dessas condições se verificarem a terceira será também satisfeita, e o systema de forças dado reduz-se a um só binario gyrante.

Não tendo logar nenhum dos casos precedentes, o systema gyrante reduzir-se-ha também a dous binarios gyrantes, se os tres braços se acharem situados no mesmo plano, isto é, se for satisfeita a condição (183), sem que o seja alguma das condições complexas (184), ou (186).

Finalmente o systema reduzir-se-ha também a um só binario gyrante, se se verificar uma das condições complexas

(184), e uma das tres (186) em que não entrem as letras daquell'outra.

170. Resumindo pois os resultados a. que ultimamente chegámos, teremos as seguintes condições de redução de um systema de binarios gyrantes a :

- |   |   |
|---|---|
| Tres binarios irreduziveis. . . . .           | { Não existencia da equação (185) para um systema dado de eixos de redução, isto é, para todos elles.   |
| Tres binarios reduziveis. . . . .             |   |
| Dous binarios irreduziveis. . . . .           | { (183) a qual, verificada para um systema d'eixos, será verdadeira para qualquer outro.  |
|   |   |
| Dous binarios irreduziveis. . . . .           | { Se em relação a um systema d'eixos de redução tiver logar uma das condições 1, 2, 3, para outro systema d'eixos verificar-se-hia tambem uma dellas. |
|   |   |
| Uma só binario. . . . .                       | { Verificada uma das condições 1, 2, 3 para um dado systema d'eixos de redução, uma dellas terá logar tambem para outro systema de eixos.             |
| Equilibrio em todas as configurações. . . . . | { (185). Tendo logar esta condição para um dado systema de eixos de redução, verificar-se-hia para todos os outros.                                   |

171. Quando os tres binarios resultantes são reduziveis, isto é, quando se verifica a condição (183), póde desejar-se conhecer as posições dos eixos de redução que dão immediatamente dous binarios gyrantes, ou um só.

Supponhamos em primeiro logar que o systema gyrate equivale a dous binarios irreduziveis, e que para o systema d'eixos  $OX, OY, OZ$  é satisfeita a condição 2 correspondente no quadro acima; para termos o systema d'eixos  $OX', OY', OZ'$  que dá a condição 1, deveremos suppor vg.,  $C' = 0$  nas equações da terceira columna (172), o que reduz essas equações a

$$\left. \begin{aligned} 0 &= cE + c'F + c''G \\ 0 &= cE' + c'F' + c''G' \\ 0 &= cE'' + c'F'' + c''G'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (187)$$

Se neste caso forem  $A, B,$  correspondentes aos braços parallelos, isto é, se tivermos

$$\frac{E}{F} = \frac{E'}{F'} = \frac{E''}{F''},$$

concluiremos combinando duas a duas as equações (187)

$$c'' (GF' - G'F) = 0; \quad c'' (GF'' - G''F) = 0;$$

e como não supomos ser

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'} = \frac{F''}{G''},$$

será  $c''=0$ , isto é, o eixo  $OZ'$  deve ser perpendicular a  $OZ$ , como era facil de ver *a priori*. Para termos a posição de  $OZ'$  no plano  $OXY$  recorreremos vg. á primeira das equações (187), que se reduz a

$$0 = cE + c'F,$$

a qual, chamando  $\phi$  o angulo  $XOZ'$ , dá

$$\operatorname{tg} \phi = - \frac{E}{F} = - \frac{E'}{F'} = - \frac{E''}{F''} = - \frac{A_1}{B_1}.$$

Por conseguinte todas as posições dos eixos de redução, que tiverem  $OZ'$  fixa na posição determinada, darão  $C'=0$ .

Supponhamos agora que os braços dos tres binarios resultantes se achão situados no mesmo plano, não se verificando nenhuma das condições complexas (184), ou (186).

Para termos a posição do eixo  $OZ'$  que dá  $C'=0$ , servir-nos-hão ainda as equações (187), uma das quaes é consequencia das outras, visto que deve ser satisfeita a condição (183).

Tomando vg. as duas primeiras, deduziremos

$$c : c' : c'' :: FG' - F'G : E'G - EG' : EF' - E'F,$$

isto é, se fizermos

$$\Delta^2 = E^2F'^2 + E'^2F^2 + E^2G'^2 + E'^2G^2 + F^2G'^2 + F'^2G^2 - 2EE'FF' - 2EE'GG' - 2FF'GG',$$

teremos

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{FG' - F'G}{\Delta} \\ c' &= \frac{GE' - G'E}{\Delta} \\ c'' &= \frac{EF' - E'F}{\Delta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (188)$$

formulas semelhantes ás que achámos (§ 113) para determinar a direcção do terceiro eixo principal.

Se fosse *vg.*  $FG' - F'G = 0$ , as duas rectas  $B_1, C_1$ , e por conseguinte  $A_1$  tambem, achar-se-hião situadas em um plano passando por  $OZ$ : serião pois verificadas as tres equações

$$FG' - F'G = 0; GE' - G'E = 0; EF' - E'F = 0;$$

teríamos  $\Delta = 0$ , e  $c, c', c''$ , tomarião a fórma indeterminada, como deveria ser pois que então as duas primeiras equações (187) não são distinctas.

Tomando neste caso a primeira, e a terceira, ou a segunda e a terceira dessas equações achariamos

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{FG'' - F'G}{\Delta'} \\ c' &= \frac{GE'' - G'E}{\Delta'} \\ c'' &= \frac{EF'' - E'F}{\Delta'} \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{F'G'' - F''G'}{\Delta''} \\ c' &= \frac{G'E'' - G''E'}{\Delta''} \\ c'' &= \frac{E'F'' - E''F'}{\Delta''} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (189).$$

Se *vg.* o primeiro destes grupos offercesse tambem a fórma indeterminada, o plano das tres linhas  $A_1, B_1, C_1$  passaria igual-

mente pelo eixo  $OY$ , isto é, coincidiria com o plano  $OYZ$ , e teriamos

$$E = F = G = 0,$$

sendo então identica a primeira das equações (187). O segundo grupo (189) daria necessariamente, neste caso, valores determinados para  $c, c', c''$ .

A's equações (188, 189) póde dar-se uma fórma mais simples, e em que não appareça a indeterminação, que tem logar nessas formulas, quando algum dos eixos de redução existe no plano dos tres braços dos binarios resultantes. Para isso representando, como fizemos no (§ 164), por  $T, U, V$  as areas dos tres parallelogramos que tem respectivamente por lados contiguos  $B_1, C_1$ , ou  $A_1, C_1$ , ou  $A_1, B_1$ , teremos

$$FG' - F'G = B_1 C_1 (\text{Cos } B_1 X \text{ Cos } C_1 Y - \text{Cos } B_1 Y \text{ Cos } C_1 X) \\ = B_1 C_1 \text{ Sen } B_1 C_1 \text{ Cos } \mathcal{Z}nT = T \text{ Cos } \mathcal{Z}nT;$$

$$GE' - G'E = U \text{ Cos } \mathcal{Z}nU; \quad EF' - E'F = V \text{ Cos } \mathcal{Z}nV,$$

e como

$$\text{Cos } \mathcal{Z}nT = \text{Cos } \mathcal{Z}nU = \text{Cos } \mathcal{Z}nV;$$

as equações (188) mudar-se-hão em

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{T}{\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}} \\ c' &= \frac{U}{\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}} \\ c'' &= \frac{V}{\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (190)$$

Chegaríamos exactamente ás mesmas formulas transformando semelhantemente as equações (189).

Logo todas as posições dos eixos de redução, que tiverem  $O\mathcal{Z}'$  fixa na direcção dada pelas formulas (188, 189, 190), darão  $C' = 0$ , advertindo que pela indeterminação de signal dos denominadores dessas equações, acharemos sem-

pre duas direcções oppostas de  $OZ'$ , que satisfazem a essa condição.

Se o systema gyrante dado equivaler a um só binario resultante, e se se verificar a condição 2 correspondente no quadro do (§ 170), para obtermos a condição 1 correspondente, isto é, para determinar as posições dos eixos de redução, que nos conduzem ás equações

$$A' = 0; \quad B' = 0;$$

deverão ser satisfeitas as seguintes (172)

$$0 = aE + a'F + a''G; \quad 0 = bE + b'F + b''G;$$

$$0 = aE' + a'F' + a''G'; \quad 0 = bE' + b'F' + b''G';$$

$$0 = aE'' + a'F'' + a''G''; \quad 0 = bE'' + b'F'' + b''G'';$$

e como, pelas condições (186), em cada um destes grupos verticaes todas as equações representam a mesma ligação algebrica dos cosenos  $a, a', a''$ , ou  $b, b', b''$ , essas equações reduzem-se a

$$0 = aE + a'F + a''G;$$

$$0 = bE + b'F + b''G;$$

donde se conclue

$$0 = (ab'' - ba'') E + (a'b'' - b'a'') F = -c'E + cF;$$

$$0 = (ab' - ba') E + (a''b' - b''a') G = c''E - cG;$$

e por conseguinte

$$c = \frac{E}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}};$$

$$c' = \frac{F}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}};$$

$$c'' = \frac{G}{\sqrt{E^2 + F^2 + G^2}}.$$

Como supponmos ser

$$E : E' : E'' : : F : F' : F'' : : G : G' : G'',$$

podemos em vez das fórmulas precedentes escrever

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \\ c' &= \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \\ c'' &= \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (191).$$

Logo tomando um dos eixos de redução na direcção determinada pelas formulas precedentes, teremos um só binario resultante.

A's formulas (191) se chegaria mais facilmente advertindo que, na hypothese actual, achando-se na mesma direcção os braços dos tres binarios resultantes, se transformarmos estes em outros cujos braços tenham todos a grandeza 1, serão as forças correspondentes  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ : compondo pois as forças applicadas aos extremos do braço commum, cada uma das forças resultantes fará com os tres eixos  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  angulos cujos cosenos serão dados pelas formulas (191).

Se finalmente supposermos ser  $C_1=0$ , e verificar-se a primeira das condições complexas (186), para termos o eixo de redução  $OX'$ , que produz um só binario resultante, é claro, que se deve fazer gyrar o systema de eixos de redução  $OXYZ$  sobre  $OZ$  até que tenhamos  $B_1=0$ , e por conseguinte

$$0 = bE + b'F,$$

donde chamando  $\varphi$  o angulo de  $OX'$ , e  $OX$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{E} = \frac{F'}{E'} = \frac{F''}{E''} = \frac{B_1}{A_1}.$$

172. Quando os tres binarios resultantes tem os braços situados no mesmo plano, sem que sejam parallelos, nem

nullo nenhum dos tres momentos maximos, as transformações que esse systema póde experimentar representão-se facilmente pela ellipse de redução. Com effeito qualquer transformação resulta de um determinado deslocamento dos eixos de decomposição  $OXYZ$ ; e esse deslocamento é sempre dado por tres rotações, uma sobre  $OZ$ , outra sobre a segunda posição do eixo  $OX$ , outra finalmente sobre a segunda posição do eixo  $OZ$ . Ora a primeira dessas rotações substitue o systema  $A, B$ , por duas outras linhas que são semidiametros conjugados da ellipse determinada pelos semidiametros conjugados  $A_1, B_1$ ; e as outras rotações dão transformações inteiramente analogas. Logo todas as transformações das tres linhas  $A_1, B_1, C_1$  situadas no mesmo plano dão outras tres linhas situadas tambem naquelle plano, que será o mesmo em que devem existir os braços dos dous unicos binarios resultantes, quando um dos eixos se toma na direcção determinada pelas equações (188, 189, 190).

173. Se tivermos dous grupos equivalentes de binarios gyrautes, e supposermos que as forças do primeiro decompostas em relação aos eixos  $OX, OY, OZ$  dão as componentes  $X, Y, Z, X', Y', Z'$ , etc. sendo  $x, y, z, x', y', z'$ , etc. as coordenadas dos centros respectivos; e suppondo que as forças do segundo grupo dão em relação aos mesmos eixos as componentes  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{X}'$ , etc., sendo  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}'$ , etc. as coordenadas dos centros respectivos; se tomarmos em sentido contrario as forças do segundo grupo, haverá equilibrio em todas as configurações entre esse novo grupo, e o primeiro dado: logo pelas condições (185) deverá ser

$$\begin{aligned} \Sigma xX - \Sigma \dot{x}\dot{X} &= \Sigma yY - \Sigma \dot{y}\dot{Y} = \Sigma zZ - \Sigma \dot{z}\dot{Z} = 0; \\ \Sigma xY - \Sigma \dot{x}\dot{Y} &= \Sigma yY - \Sigma \dot{y}\dot{Y} = \Sigma zY - \Sigma \dot{z}\dot{Y} = 0; \\ \Sigma xZ - \Sigma \dot{x}\dot{Z} &= \Sigma yZ - \Sigma \dot{y}\dot{Z} = \Sigma zZ - \Sigma \dot{z}\dot{Z} = 0; \end{aligned}$$

isto é, para que se dê equivalencia entre quaesquer dous grupos de binarios gyrautes, é necessario, e sufficiente que sejam correspondentemente iguaes os nove parametros de rotação nos dous grupos.

174. As relações que temos obtido entre os parametros de rotação correspondentes a varios systemas de eixos de reducção, e as propriedades conhecidas do ellipsoide dão-nos varias propriedades notaveis da decomposição de um grupo qualquer de forças  $P, P', P'',$  etc. em relação a diversos systemas de eixos rectangulares, mesmo no caso em que as forças dadas tem resultante; por quanto suppondo que a resultante se applicou em sentido contrario na origem  $O,$  a addição dessa nova força não faz variar a grandeza dos parametros de rotação.

Por exemplo sommando os primeiros, e ultimos membros das equações (173), acharemos

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \dots \dots \dots (192)$$

sendo esta equação verdadeira mesmo quando  $A_1, B_1, C_1$  não poderem representar os tres semidiametros conjugados de um ellipsoide, isto é, quando os tres binarios resultantes forem reduziveis. Ora os dous membros de (192) representam as sommas dos quadrados dos nove parametros de rotação das forças dadas  $P, P',$  etc. em relação aos dous systemas de eixos de reducção  $OXYZ, OX'Y'Z':$  logo é constante a somma dos quadrados de todos os parametros de um systema de forças em relação a quaesquer eixos rectangulares de reducção, isto é, teremos

$$\Sigma^2 x X + \Sigma^2 y Y + \Sigma^2 z Z + \Sigma^2 x Y + \Sigma^2 y X + \Sigma^2 x Z + \Sigma^2 z X + \Sigma^2 y Z + \Sigma^2 z Y = \text{Const.} \dots (193)$$

Se representarmos por  $L, M, N$  os tres binarios componentes totaes, que tem por eixos rectangulares  $OX, OY, OZ,$  será

$$\left. \begin{aligned} L &= \Sigma y Z - \Sigma z Y \\ M &= \Sigma z X - \Sigma x Z \\ N &= \Sigma x Y - \Sigma y X \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (194)$$

E como para todos os systemas de eixos rectangulares de reducção é

$$L^2 + M^2 + N^2 = \text{Const.},$$

substituindo nesta equação os valores (194), e subtrahindo o resultado de (193), acharemos

$$\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yY + \Sigma^2 zZ + 2(\Sigma yZ \Sigma zY + \Sigma xX \Sigma xZ + \Sigma xY \Sigma yX) = \text{Const.} \dots (195).$$

Igualmente será constante a funcção dos nove parametros (183), que como sabemos representa o parallelipipedo dos tres semieixos do ellipsoide de reduccão, ou essa expressão allecta do signal —, conforme o systema gyrante for directo, ou inverso.

Se as forças estivessem todas situadas no plano *OXY* as equações (193, 194, 195) reduzir-se-hião a

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^2 xX + \Sigma^2 yY + \Sigma^2 xY + \Sigma^2 yX &= \text{Const.} \\ \Sigma xX - \Sigma yY &= \text{Const.} \\ \Sigma^2 xX + \Sigma^2 yY + 2 \Sigma xY \Sigma yX &= \text{Const.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (196).$$

E em vez da invariabilidade da funcção (183), teremos agora a invariabilidade do parallelogramo formado por dous semidiametros conjugados quaesquer da ellipse de reduccão, isto é,

$$\Sigma yY \Sigma xX - \Sigma xY \Sigma yX = \text{Const.},$$

que combinada com a ultima (196) dá

$$\Sigma^2 xX + \Sigma^2 yY + 2 \Sigma xX \Sigma yY = \text{Const.},$$

donde

$$\Sigma xX + \Sigma yY = \text{Const.}$$

Esta ultima equação obter-se-hia immediatamente sommando as equações (28, 31 § 70).

175. Cumpre-nos agora representar, e exprimir por um modo geral e simples a acção mechanica de um systema qualquer de binarios gyrantes no espaço em qualquer das suas configurações.

A direcção dos eixos, bem como a grandeza de cada um dos momentos dos tres binarios resultantes em qualquer configuração, representão-se mui simplesmente pela situação respectiva dos eixos directrizes.

Com effeito supponhamos que substituimos o systema de forças dado pelos tres binarios resultantes principaes.

Sejão *OX*, *OY*, *OZ* (fig. 16) as direcções dos braços desses binarios que suppremos primeiro constituirem um systema directo, e admittamos a hypothese de que se parte

da configuração inicial em que as forças positivas  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$  dos tres binarios tem igualmente as direcções  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Imaginemos que se passou para outra configuração em que os eixos directrizes tomarão a posição  $X'Y'Z'$ . Sendo  $X'$  pólo de  $Y'Z'$ , e  $X$  pólo de  $YZ$ , será a intersecção  $X'$  desses dous arcos pólo do arco  $XX'$ ; e como  $XX'$  determina o plano do braço  $OX$ , e da força  $X_1$  na configuração  $X'Y'Z'$ , segue-se que  $OX''$  é a direcção do eixo do binario  $A$  nessa configuração; do mesmo modo serão  $OY''$ ,  $OZ''$  as direcções dos eixos dos binarios  $B$ ,  $C$  nessa configuração, isto é, as direcções dos eixos dos tres binarios resultantes em cada configuração são dadas pelas intersecções dos planos coordenados da mesma denominação na configuração inicial, e naquella de que se tracta, sendo cada intersecção correspondente ao binario da denominação do eixo directriz não existente nos planos intersectados. Cada uma das intersecções dá duas direcções oppostas para o eixo do binario respectivo; mas é facil de ver que *vg.* devemos tomar o ponto  $X''$ , para o qual  $XX'$  é um movimento directo, se for  $XX' < 180^\circ$ , e devemos tomar o ponto diametralmente opposto a  $X''$ , se  $XX' > 180^\circ$ ; ou contando a distancia  $XX'$  de modo que seja sempre  $XX' < 180^\circ$ , tomar  $X''$  de modo, que em relação a esse ponto seja directa a rotação  $XX'$ .

Se os tres binarios resultantes constituíssem um systema inverso, deveríamos tomar os braços correspondentes a  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nos sentidos  $XO$ ,  $YO$ ,  $ZO$ , e tomaríamos para pólos  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  dos tres eixos os pontos diametralmente oppostos aos designados no caso precedente.

Os momentos de cada um dos tres binarios na configuração  $X'Y'Z'$  são evidentemente nos systemas directos, ou inversos

$$A \text{ Sen } XX', B \text{ Sen } YY', C \text{ Sen } ZZ',$$

tomando sempre os tres senos com o signal +.

Temos pois representado completamente o systema gyrante na configuração  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  pelos tres momentos precedentes correspondentes aos eixos  $OX''$ ,  $OY''$ ,  $OZ''$ .

176. E' porém mais natural e mais simplas referir o systema gyrante na configuração  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  aos tres eixos fixos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , isto é, determinar as grandezas  $L$ ,  $M$ ,  $N$  dos momentos dos tres binarios componentes totaes, que tem por eixos esses eixos fixos.

Para effectuar da maneira mais geral essa determinação, supponhamos em primeiro logar que se toma, com qualquer posição no espaço, o systema de eixos reangulares fixos  $OXYZ$ , e que se parte da configuração inicial em que o systema directriz  $OX'Y'Z'$  coincide com aquell'outro. Chamando nessa configuração  $L_i, M_i, N_i$  os momentos componentes totaes relativos aos eixos fixos, teremos

$$\left. \begin{aligned} L_i &= \Sigma (yZ - zY) \\ M_i &= \Sigma (zX - xZ) \\ N_i &= \Sigma (xY - yX) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (197).$$

Suppondo agora que se passa para outra configuração  $X', Y', Z'$ , e chamando nessa configuração  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{X}', etc.$  as componentes das forças em relação aos eixos fixos, e  $L, M, N$  os momentos componentes totaes respectivos aos mesmos eixos, teremos

$$\left. \begin{aligned} L &= \Sigma (y\dot{Z} - z\dot{Y}) \\ M &= \Sigma (z\dot{X} - x\dot{Z}) \\ N &= \Sigma (x\dot{Y} - y\dot{X}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (198).$$

Representando por  $(a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c'')$  os cosenos dos angulos que cada um dos eixos  $OX', OY', OZ'$  faz com os tres eixos fixos  $OX, OY, OZ$ ; se designarmos por  $\alpha, \zeta, \gamma$  os tres angulos que com os ultimos eixos faz cada força  $P$  na configuração inicial; e por  $\alpha_i, \zeta_i, \gamma_i$  os angulos dessa força com os mesmos eixos na configuração  $X', Y', Z'$ , teremos

$$\begin{aligned} \text{Cos } \alpha_i &= a \text{ Cos } \alpha + b \text{ Cos } \zeta + c \text{ Cos } \gamma; \\ \text{Cos } \zeta_i &= a' \text{ Cos } \alpha + b' \text{ Cos } \zeta + c' \text{ Cos } \gamma; \\ \text{Cos } \gamma_i &= a'' \text{ Cos } \alpha + b'' \text{ Cos } \zeta + c'' \text{ Cos } \gamma; \end{aligned}$$

e, multiplicando cada uma destas equações por  $P$ , teremos

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a X + b Y + c Z; \\ \dot{Y} &= a' X + b' Y + c' Z; \\ \dot{Z} &= a'' X + b'' Y + c'' Z; \end{aligned}$$

substituindo estes valores nas equações (198), acharemos

$$\left. \begin{aligned} L &= a'' \Sigma_y X + b'' \Sigma_y Y + c'' \Sigma_y Z - a' \Sigma_z X - b' \Sigma_z Y - c' \Sigma_z Z \\ M &= a \Sigma_z X + b \Sigma_z Y + c \Sigma_z Z - a'' \Sigma_x X - b'' \Sigma_x Y - c'' \Sigma_x Z \\ N &= a' \Sigma_x X + b' \Sigma_x Y + c' \Sigma_x Z - a \Sigma_y X - b \Sigma_y Y - c \Sigma_y Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (199)$$

equações que nos dão os binarios  $L, M, N$  relativos á configuração  $X'Y'Z'$  por meio dos nove parâmetros iniciais, e pelos nove cosenos  $a, a',$  etc. que indicão a rotação do systema directriz necessaria para se passar da configuração inicial  $XYZ$  para a configuração  $X'Y'Z'$ .

As mesmas equações nos darão o momento resultante total

$$Q = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

e os três cosenos  $\frac{L}{Q}, \frac{M}{Q}, \frac{N}{Q}$  dos angulos que o seu eixo faz com  $OX, OY, OZ$ .

177. As equações (199) simplificão-se consideravelmente tomando os eixos  $OX, OY, OZ$  respectivamente parallelos aos braços dos binarios resultantes principaes, e partindo da configuração inicial em que as forças positivas  $X_1, Y_1, Z_1$  desses binarios são respectivamente parallelas a  $OX, OY, OZ$ ; nestas hypothèses ver-se-ha, pelas equações (181), que as formulas (199) se reduzem a

$$\left. \begin{aligned} \pm L &= b'' B - c' C \\ \pm M &= c C - a'' A \\ \pm N &= a' A - b B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (200)$$

tomando nos primeiros membros o signal  $+$ , ou  $-$  conforme o systema gyrante for directo, ou inverso. Teriamos formulas igualmente simples, se conservando aos eixos  $OX, OY, OZ$  as direcções dos braços dos binarios principaes,

partissemos d'uma configuração inicial, em que as forças  $X_1, Y_1, Z_1$  fossem paralelas, não correspondentemente, aos eixos  $OX, OY, OZ$ .

178. Nas formulas (200) substituindo os angulos d'Euler, teremos

$$\left. \begin{aligned} \underline{+}L &= \text{Sen } \theta \text{ Cos } \varphi B + \text{Sen } \theta \text{ Cos } \psi C \\ \underline{+}M &= \text{Sen } \theta \text{ Sen } \psi C - \text{Sen } \theta \text{ Sen } \varphi A \\ \underline{+}N &= (\text{Sen } \varphi \text{ Cos } \psi \text{ Cos } \theta + \text{Cos } \varphi \text{ Sen } \psi) A + (\text{Sen } \psi \text{ Cos } \varphi \text{ Cos } \theta + \text{Sen } \varphi \text{ Sen } \psi) B \end{aligned} \right\} (201)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} \underline{+}L &= \text{Sen } \theta (B \text{ Cos } \varphi + C \text{ Cos } \psi) \\ \underline{+}M &= \text{Sen } \theta (C \text{ Sen } \psi - A \text{ Sen } \varphi) \\ \underline{+}N &= \text{Cos } \theta (A \text{ Sen } \varphi \text{ Cos } \psi + B \text{ Cos } \varphi \text{ Sen } \psi) + A \text{ Cos } \varphi \text{ Sen } \psi + B \text{ Sen } \varphi \text{ Cos } \psi \end{aligned} \right\} (202).$$

179. Empregando o systema d'angulos  $x, y, z, \omega$ , as formulas (200) mudão-se em

$$\begin{aligned} \underline{+}L &= B (\text{Cos } x \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } y \text{ Cos } z) + C (\text{Cos } x \text{ Sen } \omega - (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } y \text{ Cos } z); \\ \underline{+}M &= C (\text{Cos } y \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } z) + A (\text{Cos } y \text{ Sen } \omega - (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } z); \\ \underline{+}N &= A (\text{Cos } z \text{ Sen } \omega + (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } y) + B (\text{Cos } z \text{ Sen } \omega - (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } y); \end{aligned}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} \underline{+}L &= (B + C) \text{ Cos } x \text{ Sen } \omega + (B - C) (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } y \text{ Cos } z \\ \underline{+}M &= (A + C) \text{ Cos } y \text{ Sen } \omega + (C - A) (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } z \\ \underline{+}N &= (A + B) \text{ Cos } z \text{ Sen } \omega + (A - B) (1 - \text{Cos } \omega) \text{ Cos } x \text{ Cos } y \end{aligned} \right\} (203).$$

180. Determinemos agora as configurações em que o binario resultante total  $Q$  se aniquila, e por conseguinte o systema de forças gyrantes se equilibra. Supporemos em primeiro logar, que os tres binarios resultantes não são reduzíveis a um só binario gyrante, ou ao equilibrio em todas as configurações, isto é, que das tres quantidades  $A, B, C$  apenas uma poderá aniquilar-se.

Para achar as configurações d'equilibrio podiamos empregar as formulas (202); mas é muito mais simples apro-

veitar para essa investigação as equações (203), que na hypothese actual se reduzem a

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (B+C) \operatorname{Cos} x \operatorname{Sen} \omega + (B-C) (1-\operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} z \\ 0 &= (A+C) \operatorname{Cos} y \operatorname{Sen} \omega + (C-A) (1-\operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} z \\ 0 &= (A+B) \operatorname{Cos} z \operatorname{Sen} \omega + (A-B) (1-\operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \end{aligned} \right\} \dots (204).$$

Multiplicando a primeira por  $\operatorname{Cos} x$ , a segunda por  $\operatorname{Cos} y$ , a tereceira por  $\operatorname{Cos} z$ , e sommando os resultados, acharemos

$$0 = \left( (B+C) \operatorname{Cos}^2 x + (A+C) \operatorname{Cos}^2 y + (A+B) \operatorname{Cos}^2 z \right) \operatorname{Sen} \omega;$$

e como não podem ser simultaneamente zero os tres termos que multiplicação  $\operatorname{Sen} \omega$ , concluiremos  $\operatorname{Sen} \omega = 0$ , o que reduz as equações (204) a

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (B-C) (1-\operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} z \\ 0 &= (C-A) (1-\operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} z \\ 0 &= (A-B) (1-\operatorname{Cos} \omega) \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \end{aligned} \right\} \dots (205).$$

Da equação  $\operatorname{Sen} \omega = 0$ , deduzimos  $\omega = 0$ , ou  $\omega = 180^\circ$ : o primeiro valor corresponde á configuração inicial; adoptando o segundo reduziremos (205) a

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (B-C) \operatorname{Cos} y \operatorname{Cos} z \\ 0 &= (C-A) \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} z \\ 0 &= (A-B) \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \end{aligned} \right\} \dots (206)$$

equações de que se infere, que sendo designaes  $A, B, C$  é forçoso, que se aniquilem dons dos tres cosenos  $\operatorname{Cos} x, \operatorname{Cos} y, \operatorname{Cos} z$ : ou que, sendo iguaes vg.  $A, B$ , as equações (206) serão tambem satisfeitas, quando for  $\operatorname{Cos} z = 0$ ; e que finalmente se  $A=B=C$  as equações (206) serão sempre satisfeitas: concluiremos por conseguinte:

1.º Se  $A, B, C$  forem designaes haverá equilibrio, além da configuração inicial, sómente nas tres configurações que procedem desta por uma rotação de  $180^\circ$  sobre cada um dos eixos principaes.

2.º Se forem iguaes duas das quantidades  $A, B, C$ , haverá equilibrio, além das quatro configurações precedentes, em todas as que procedem da inicial por meio de uma rotação de  $180^\circ$  sobre um eixo qualquer situado no plano dos dous eixos principaes a que correspondem os dous momentos maximos iguaes.

3.º Se for  $A=B=C$ , haverá equilibrio na configuração inicial, e em todas as que procedem desta por uma rotação de  $180^\circ$  sobre um eixo qualquer.

Se o systema de binarios dado fosse reduzivel a um só binario gyrante ( $m, X_i$ ), é evidente que as configurações de equilibrio serão dadas por todas as posições do systema directriz, em que o eixo  $OX'$  fosse paralelo a  $m$ .

181. Se supposermos iguaes as tres quantidades  $A, B, C$ , as equações (203) reduzem-se a

$$\left. \begin{aligned} \pm L &= 2 A \text{ Sen } \omega \text{ Cos } x \\ \pm M &= 2 A \text{ Sen } \omega \text{ Cos } y \\ \pm N &= 2 A \text{ Sen } \omega \text{ Cos } z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (207).$$

Estas equações dão uma representação simplicissima do systema gyrante neste caso. Com effeito o momento resultante total, prescindindo do signal, é dado pela equação

$$Q = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = 2 A \text{ Sen } \omega,$$

que indica, que o maximo binario resultante total é  $2 A$ , e que o momento do binario resultante total para qualquer configuração deduz-se do momento maximo multiplicando-o pelo seno do angulo da rotação pela qual se passa da configuração inicial para a configuração de que se tracta. Suppondo que o systema gyrante é directo, o eixo desse binario resultante coincide sempre com o eixo  $x, y, z$  em torno do qual se fez essa rotação, em quanto for  $\omega < 180^\circ$ , e com o eixo opposto áquelle sendo  $\omega > 180^\circ$ . O contrario acontece nos systemas gyranes inversos. Vê se por tanto que, sendo iguaes os tres momentos resultantes principaes, as configurações se distribuem por um modo staticamente symetrico em torno de cada eixo de rotação, isto é, adoptando quaesquer dous eixos de rotação, haverá dous binarios resultantes totaes  $Q$  da mesma grandeza, e tendo

eixos coincidentes com esses eixos de rotação, se em ambos os casos forem iguaes as rotações  $\omega$ .

As configurações em que  $Q$  tem a grandeza maxima  $2A$ , resultão da inicial por meio de uma rotação de  $90^\circ$ , ou  $270^\circ$  em torno d'um eixo qualquer.

182. O momento resultante total  $Q$  suppondo  $A, B, C$  iguaes, ou designaes, é, em virtude das formulas (200), determinado pela equação

$$\begin{aligned} Q^2 &= (1 - a^2) A^2 + (1 - b'^2) B^2 + (1 - c''^2) C^2 - 2 (b'c'BC + ca''AC + a'b'AB) \\ &= (1 - a^2) A^2 + (1 - b'^2) B^2 + (1 - c''^2) C^2 + 2 (aBC + b'AC + c''AB) \\ &\quad - 2 (b'c''BC + ac''AC + ab'AB), \end{aligned}$$

isto é,

$$Q^2 = A^2 + B^2 + C^2 - (aA + b'B + c''C)^2 + 2 (aBC + b'AC + c''AB) \dots (208)$$

donde se vê que  $Q$  depende só dos tres cosenos  $a, b', c''$  que determinão a rotação  $\omega$ .

183. Exprimiremos  $Q$  nos angulos  $\psi, \varphi, \theta$ , substituindo em (208) os valores de  $a, b', c''$ , e teremos

$$\begin{aligned} Q^2 &= A^2 + B^2 + C^2 - \left( (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) A + (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \varphi) B + C \cos \theta \right)^2 \\ &+ 2 \left( (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) BC + (\cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi) AC + \cos \theta AB \right), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} Q^2 &= A^2 + B^2 + C^2 - \left( (A + B \cos \theta) \cos \varphi \cos \psi - (A \cos \theta + B) \sin \varphi \sin \psi + C \cos \theta \right)^2 \\ &+ 2 \left( (BC + AC \cos \theta) \cos \varphi \cos \psi - (BC \cos \theta + AC) \sin \varphi \sin \psi + AB \cos \theta \right) \dots (209). \end{aligned}$$

184. Finalmente querendo exprimir  $Q$  nos angulos  $x, y, z, \omega$ , faremos as substituições convenientes em (208), e teremos

$$Q^2 = A^2 + B^2 + C^2 - \left( (A + B + C) \text{Cos } \omega + (A \text{Cos}^2 x + B \text{Cos}^2 y + C \text{Cos}^2 z) (1 - \text{Cos } \omega) \right)^2 +$$

$$2 (BC \text{Cos}^2 x + AC \text{Cos}^2 y + AB \text{Cos}^2 z) (1 - \text{Cos } \omega) + 2 (BC + AC + BA) \text{Cos } \omega$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2) \text{Sen}^2 \omega + 2 (BC + AC + AB) (\text{Cos } \omega - \text{Cos}^2 \omega)$$

$$- 2 (A + B + C) (A \text{Cos}^2 x + B \text{Cos}^2 y + C \text{Cos}^2 z) (\text{Cos } \omega - \text{Cos}^2 \omega)$$

$$+ 2 (BC \text{Cos}^2 x + AC \text{Cos}^2 y + AB \text{Cos}^2 z) (1 - \text{Cos } \omega) - (A \text{Cos}^2 x + B \text{Cos}^2 y + C \text{Cos}^2 z)^2 (1 - \text{Cos } \omega)^2;$$

ou finalmente

$$Q^2 = (A \text{Sen}^2 x + B \text{Sen}^2 y + C \text{Sen}^2 z)^2 \text{Sen}^2 \omega - 2 (BC \text{Sen}^2 x + AC \text{Sen}^2 y + AB \text{Sen}^2 z) (1 - \text{Cos } \omega) \left. \vphantom{Q^2} \right\} (210).$$

$$+ 2 (A \text{Cos}^2 x + B \text{Cos}^2 y + C \text{Cos}^2 z) (A \text{Sen}^2 x + B \text{Sen}^2 y + C \text{Sen}^2 z) (1 - \text{Cos } \omega)$$

185. Para determinar o maximo valor de  $Q$ , suppondo que nenhuma das quantidades  $A, B, C$  é zero, recorreremos á formula (208), e sendo

$$a = \text{Cos } XX'; \quad b = \text{Cos } YY'; \quad c' = \text{Cos } ZZ';$$

deveremos ter as tres equações

$$\frac{dQ^2}{dXX'} = 0 = A \text{Sen } XX' (aA + b'B + c''C) - BC \text{Sen } XX';$$

$$\frac{dQ^2}{dYY'} = 0 = B \text{Sen } YY' (aA + b'B + c''C) - AC \text{Sen } YY';$$

$$\frac{dQ^2}{dZZ'} = 0 = C \text{Sen } ZZ' (aA + b'B + c''C) - AB \text{Sen } ZZ';$$

se supposermos que não é zero nenhum dos senos  $\text{Sen } XX', \text{Sen } YY', \text{Sen } ZZ'$ , teremos

$$aA + b'B + c'C = \frac{BC}{A} = \frac{AC}{B} = \frac{AB}{C}, \text{ donde } A = B = C.$$

Logo se supposermos que  $A, B, C$  não são todos iguaes, não haverá maximo fóra das configurações em que alguma das directrizes  $OX', OY', OZ'$  coincide com um dos eixos principaes.

Suppondo  $\text{Sen } XX' = 0$ , isto é,  $XX' = 0$ , ou  $XX' = 180^\circ$ , será evidentemente o maximo

$$Q = B + C, \text{ ou } Q = B \cup C,$$

conforme para o valor adoptado de  $XX'$  for directo, ou inverso o systema dos dous ultimos binarios resultantes principaes.

Semelhantemente para  $\text{Sen } YY' = 0$ , teremos o maximo

$$Q = A + C, \text{ ou } Q = A \cup C.$$

E para  $\text{Sen } ZZ' = 0$ , será

$$Q = A + B, \text{ ou } Q = A \cup B.$$

E' claro por conseguinte que se for  $C$  o menor dos tres momentos resultantes maximos principaes, será o valor maximo absoluto de

$$Q = A + B.$$

E' evidente a posição que nestas configurações deverão tomar os eixos directrizes.

Se um dos tres momentos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  fosse zero, suppondo vg.  $C = 0$ , teriamos o maximo absoluto  $Q = A + B$ .

186. Dado pois um systema de binarios gyrantes, para conhecer de um modo geral o momento do binario resultante total  $Q$ , e a direcção do seu eixo em cada configuração, calcularemos n'uma configuração qualquer os nove parametros  $\varepsilon x\dot{X}$ ,  $\varepsilon y\dot{X}$ , etc., e teremos as grandezas e direcções dos tres semidiametros  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de um ellipsoide, do qual determinaremos as direcções e grandezas dos semieixos, fixando desse modo os eixos principaes  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  e as grandezas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; as equações (180) nos darão a posição dos eixos de decomposição que convem adoptar como directrizes, pois que dão os tres binarios resultantes principaes, e teremos por conseguinte os meios de conhecer facilmente a posição dos eixos directrizes em qualquer configuração, a grandeza de  $Q$ , e a direcção do seu eixo, para o que nos serviremos das formulas deduzidas, que nos dão  $Q$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ .

187. Pelas equações (199) se vê, que um systema de binarios gyrantes dará um binario resultante total determinavel em qualquer configuração, uma vez que conheça-

mos os nove parametros de rotação para uma configuração qualquer, e n'uma dada posição dos eixos de redução. Para conhecer essas nove funcções são necessarios, e sufficientes, em geral, tres grupos d'equações analogas a (199). Logo um systema de binarios gyrantes é determinavel, em geral, quando for conhecido o seu binario resultante total em tres configurações dadas. E' evidente que as nove equações fornecidas por essas tres configurações podem, em casos particulares, não ser sufficientes para aquella determinação.

188. Do paragrapho antecedente, e do que se demonstrou (§ 173), concluir-se-ha que dous systemas de binarios gyrantes serão equivalentes em todas as configurações, se o forem em tres dellas, advertindo-se que esta proposição é sujeita ás excepções indicadas (§ 187).

---

## VI.

### *Systemas gyrantes dotados de resultante.*

---

189. Do que precedentemente expusemos é obvia a maneira como deverá ser tractado qualquer systema gyrate dotado de resultante.

Esse systema poderá ser substituido pela sua resultante  $R$ , gyrando em um centro  $O$  arbitrariamente tomado, e por um grupo de binarios gyrantes reduziveis em geral a tres binarios gyrantes.

Se o ponto  $O$  for o centro do systema, a sua representação é mais simples como vimos (2.ª Parte I), pois que então o systema se reduz em geral á força  $R$ , e a dous binarios gyrantes.

190. A representação do systema gyrate tornar-se-hia extremamente simples, se fosse possível achar um centro  $O$  para o qual transportando a resultante, o ellipsoide de redução correspondente se convertesse em uma esphera. Mas essa simplificação não póde realizar-se senão em casos particulares; por quanto só poderíamos dispor de tres arbitrarias  $'x$ ,  $'y$ ,  $'z$ , coordenadas do novo centro, para satisfazer ás cinco condições (182).

191. Para que dous systemas gyrate dotados de resultante sejam equivalentes em todas as configurações, é claro que além das condições do (§ 173), isto é, da correspondente igualdade dos parametros de rotação, é necessario que tenhamos tambem

$$\Sigma X = \Sigma \dot{X}; \quad \Sigma Y = \Sigma \dot{Y}; \quad \Sigma Z = \Sigma \dot{Z}.$$

192. Dos (§§ 187, 191) se conclue que um systema gyrate dotado de resultante será, em geral, determinavel, quando for conhecida a sua resultante, e o seu binario resultante total em tres configurações: e infere-se tambem que dous systemas gyrate dotados de resultante são, em geral, equivalentes em todas as configurações, quando o forem em tres dellas.

---

---



---

NOTAS, E ADDITAMENTOS.

---

§ 68.

Convirá tornar mais clara, do que fizemos neste §, a distincção entre os systemas directos, e inversos, isto é, demonstrar que um delles não póde converter-se no outro pela simples rotação dos eixos rectangulares de redução  $OX$ ,  $OY$  no plano directriz em que forão traçados. Com effeito para que em virtude dessa rotação o systema vg. directo  $m$ ,  $m'$  se convertesse em inverso, como a rotação continua dos eixos deve produzir a variação continua do angulo de  $m$ ,  $m'$ , seria forçoso que esse angulo passasse por  $0^\circ$ , ou  $180^\circ$ ; nesses dous casos os dous binarios dados, por hypothese irreduziveis, equivalerão a dous binarios de braços coincidentes, e por conseguinte reduziveis a um só binario, o que é inadmissivel.

---

§ 71.

As formulas (47) deduzir-se-hão directa, e facilmente das equações (32, 33, 36, 37). Com effeito (32, 36) dão para denominador de  $\text{Cos } a$ , e  $\text{Sen } a$  a funcção

$$\Sigma xX \Sigma yY - \Sigma xY \Sigma yX = A_1 B_1 \text{ Sen } (m'X - mX) = \pm AB;$$

conforme os dous binarios resultantes forem do systema directo, ou inverso. Teremos pois

$$\left. \begin{aligned} \text{Cos } a &= \frac{A' \text{Cos } mX \Sigma yY - A' \text{ Sen } mX \Sigma xY}{\pm AB} = \pm \frac{A' B_1 \text{ Sen } (m'X - mX)}{AB} \\ \text{Sen } a &= \frac{A' \text{ Sen } mX \Sigma xX - A' \text{ Cos } mX \Sigma yX}{\pm AB} = \pm \frac{A' A_1 \text{ Sen } (mX - mX)}{AB} \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

e por simples substituições nas equações (A) concluiremos immediatamente das equações (33, 37)

$$\left. \begin{aligned} - \text{Sen } a &= \pm \frac{B' B_1 \text{ Sen } (m'X - m'X)}{AB} \\ \text{Cos } a &= \pm \frac{B' A_1 \text{ Sen } (m'X - mX)}{AB} \end{aligned} \right\} \dots (B)$$

Se os semidiametros  $A_1, B_1$  coincidirem com os semieixos  $A, B$  da ellipse de redução, teremos dando a  $\alpha$ , e  $\alpha'$  as designações do (§ 71)

$$A_1 = A; \quad B_1 = B;$$

$$\text{Sen } (m'X - mX) = \pm \text{Cos } \alpha; \quad \text{Sen } (mX - mX) = \text{Sen } \alpha;$$

$$\text{Sen } (m'X - m'X) = \pm \text{Cos } \alpha'; \quad \text{Sen } (m'X - mX) = \text{Sen } \alpha';$$

equações em que se deve tomar o signal +, ou - conforme se tratar de systemas directos, ou inversos, e que mudão (A, B) nas formulas achadas (47).

==

§ 75.

Demonstraremos que, qualquer valor que se dê a  $\text{tg } XY$  na formula (54), nunca esta dará  $\text{Sen}^2 2\alpha > 1$ .

Fazendo por simplicidade

$$mX_1 = A; m'Y_1 = B; \frac{2AB \operatorname{Sen} \alpha}{\operatorname{tg} \angle XY} = K;$$

(54) mudar-se-ha em

$$A^2 \operatorname{Sen} 2\alpha + B^2 \operatorname{Sen} 2\alpha' = K;$$

a qual, desenvolvendo  $\operatorname{Sen} 2\alpha'$ , e representando por  $M, N$  os coefficients de  $\operatorname{Sen} 2\alpha, \operatorname{Cos} 2\alpha$ , reduz-se a

$$M \operatorname{Sen} 2\alpha + N \operatorname{Cos} 2\alpha = K \dots \dots \dots (C),$$

donde

$$M^2 \operatorname{Sen}^2 2\alpha - 2KM \operatorname{Sen} 2\alpha = -K^2 + N^2 \operatorname{Cos}^2 2\alpha;$$

$$\operatorname{Sen}^2 2\alpha - \frac{2KM}{M^2 + N^2} \operatorname{Sen} 2\alpha = \frac{N^2 - K^2}{M^2 + N^2};$$

suppondo por em quanto que não é

$$M^2 + N^2 = 0.$$

Teremos por conseguinte

$$\operatorname{Sen} 2\alpha = \frac{KM}{M^2 + N^2} \pm \frac{N}{M^2 + N^2} \sqrt{M^2 + N^2 - K^2} \dots \dots (D).$$

Para termos o maximo, ou minimo de  $\operatorname{Sen} 2\alpha$  differenciamos o seu valor em relação a  $K$ , e teremos

$$M \pm \frac{NK}{\sqrt{M^2 + N^2 - K^2}} = 0, \text{ ou } = \infty.$$

Na segunda hypothese teriamos

$$K^2 = M^2 + N^2; \operatorname{Sen} 2\alpha = \pm \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}},$$

e por conseguinte

$$\operatorname{Sen}^2 2\alpha = < 1.$$

Na primeira hypothese concluir-se-ha

$$M^2 (M^2 + N^2 - K^2) = N^2 K^2;$$

$$M^2 (M^2 + N^2) = K^2 (M^2 + N^2);$$

$$K = \pm M;$$

a ultima equação reduz (D) a

$$\text{Sen } 2 \alpha = \frac{+M^2 + N^2}{M^2 + N^2},$$

donde se conclue tambem

$$\text{Sen}^2 2 \alpha = < 1.$$

Supponhamos agora que é

$$M^2 + N^2 = 0, \text{ isto é, } M = N = 0;$$

o valor achado (D) tomaria a fórma  $\frac{0}{0}$ . Neste caso substituindo os valores de  $M$ , e  $N$  nas ultimas equações teremos

$$A^2 + B^2 \text{ Cos } 2 \alpha = 0;$$

$$B^2 \text{ Sen } 2 \alpha = 0;$$

e por conseguinte será

$$\text{Sen } 2 \alpha = 0; A = B; \text{ Cos } 2 \alpha = -1;$$

logo os braços  $m$ ,  $m'$  são perpendiculares, e são iguaes os momentos maximos dos dous binarios dados: a equação (C) dará  $K = 0$ , e por tanto será

$$\text{tg } XY = \infty,$$

isto é, quando dous binarios cujos momentos maximos são iguaes, e cujas forças, e cujos braços são entre si perpendiculares, se transformão em outros dous binarios cujos braços são perpendiculares, no segundo grupo serão tambem perpendiculares as forças, e iguaes os momentos maximos. E como se demonstra (§ 84) que na hypothese actual a rotação dos braços é igual á rotação das forças, e no mesmo sentido, conclue-se que todas as transformações,

que póde soffrer o grupo dado de dous binarios, conservando-se os braços perpendiculares, são as que resultão da rotação do systema  $OmX_1, Om'Y_1$ , considerado inflexivel, sobre o eixo perpendicular ao plano  $mOm'$ , suppondo sempre que na configuração em que se considerão os dous binarios dados as forças  $X_1, Y_1$  existem naquelle plano.

==

§ 86.

Era neste paragrapho o logar mais proprio para se demonstrar a proposição ali apenas enunciada. Demonstraremos pois independentemente do raciocinio indirecto que apresentamos depois no (§ 95), que se decompondo um systema de forças gyrantes, dotado de resultante, em relação a tres eixos rectangulares, ou obliquos, comtanto pôrêm que o eixo  $OZ$  seja paralelo a  $R$  na configuração em que se fez a decomposição, obtivermos ou uma força gyrente, e dous binarios gyrantes irreduziveis, ou uma força, e um binario gyrantes, ou sómente uma força gyrente; destas tres hypotheses aquella que se verificar, será tambem a que tem logar, quando o systema gyrente se decomposer em relação a outros eixos quaesquer  $OX', OY', OZ'$ , comtanto que o ultimo seja igualmente paralelo a  $R$ , na configuração em que se fizerão as duas decomposições.

A demonstração reduz-se a provar que se em relação ao primeiro systema de eixos se verificar uma das duas condições complexas (62, 63)

$$\frac{\sum xX}{\sum xY} = \frac{\sum yX}{\sum yY} = \frac{\sum zX}{\sum zY} \dots \dots \dots (E)$$

$$\sum xX = \sum yX = \sum zX = \sum xY = \sum yY = \sum zY = 0 \dots (F)$$

essa mesma condição se verificará para o segundo systema

d'eixos; donde se conclue immediatamente que se para o primeiro systema d'eixos nem (F), nem (E) for verdadeira, o mesmo acontecerá para o segundo.

Com effeito como a transição das coordenadas do systema  $OXYZ$  para as coordenadas do systema  $OX'Y'Z'$  se effeitua por meio das equações

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= p x + q y + r z \\ \dot{y} &= p' x + q' y + r' z \\ \dot{z} &= p'' x + q'' y + z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (G)$$

multiplicando successivamente os dous termos da primeira fracção (E) por  $p, p', p''$ ; os da segunda por  $q, q', q''$ ; os da terceira por  $r, r', 1$ ; e sommâdo correspondentemente os termos das fracções resultantes acharemos

$$\frac{\sum \dot{x}X}{\sum \dot{x}Y} = \frac{\sum \dot{y}X}{\sum \dot{y}Y} = \frac{\sum \dot{z}X}{\sum \dot{z}Y},$$

donde

$$\frac{\sum \dot{x}X}{\sum \dot{y}X} = \frac{\sum \dot{x}Y}{\sum \dot{y}Y}; \quad \frac{\sum \dot{x}X}{\sum \dot{z}X} = \frac{\sum \dot{x}Y}{\sum \dot{z}Y} \dots\dots\dots (H).$$

e como as componentes  $\dot{X}, \dot{Y}$ , etc. das forças gyranles em relação ao segundo systema d'eixos são dadas pelas equações

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= p X + q Y + r Z \\ \dot{Y} &= p' X + q' Y + r' Z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I)$$

e como se deduz da primeira das equações (H)

$$\frac{\sum \dot{x} (pX + qY)}{\sum \dot{y} (pX + qY)} = \frac{\sum \dot{x} (p'X + q'Y)}{\sum \dot{y} (p'X + q'Y)},$$

teremos

$$\frac{\sum \dot{x}\dot{X} - r \sum \dot{x}\dot{Z}}{\sum \dot{y}\dot{X} - r \sum \dot{y}\dot{Z}} = \frac{\sum \dot{x}\dot{Y} - r' \sum \dot{x}\dot{Z}}{\sum \dot{y}\dot{Y} - r' \sum \dot{y}\dot{Z}}.$$

Suppondo que se tomou para origem *O* o centro da resultante, que se obtém na decomposição em relação ao systema *OXYZ*, teremos

$$\sum \dot{x}\dot{Z} = \sum \dot{y}\dot{Z} = 0,$$

o que reduz a equação precedente a

$$\frac{\sum \dot{x}\dot{X}}{\sum \dot{y}\dot{X}} = \frac{\sum \dot{x}\dot{Y}}{\sum \dot{y}\dot{Y}} \dots \dots \dots (J)$$

a qual será também verdadeira deslocando-se a origem *O* para qualquer outra posição, visto que esse deslocamento conserva invariáveis as grandezas dos termos das fracções (J).

Por um modo inteiramente analogo deduziremos da segunda das equações (H)

$$\frac{\sum \dot{x}\dot{X}}{\sum \dot{z}\dot{X}} = \frac{\sum \dot{x}\dot{Y}}{\sum \dot{z}\dot{Y}} \dots \dots \dots (K).$$

As equações (J, K) provão que a condição (E) subsiste para todos os systemas de eixos de redução, uma vez que se verifique para um delles.

Semelhantemente das equações (F), por meio das formulas (G), passa-se para

$$\sum \dot{x}\dot{X} = \sum \dot{y}\dot{X} = \sum \dot{z}\dot{X} = \sum \dot{x}\dot{Y} = \sum \dot{y}\dot{Y} = \sum \dot{z}\dot{Y} = 0;$$

e destas por meio das equações (I), conclue-se finalmente

$$\sum \dot{x}\dot{X} = \sum \dot{y}\dot{X} = \sum \dot{z}\dot{X} = \sum \dot{x}\dot{Y} = \sum \dot{y}\dot{Y} = \sum \dot{z}\dot{Y} = 0,$$

para quando a origem *O* coincide com o centro da resultante relativo ao systema *OXYZ*, e por conseguinte também para qualquer outra posição da dita origem.



§ 92.

Na demonstração que demos neste parographo de que o systema gyrante se reduz a uma força, e a um binario gyrantes, quando os tres centros  $O$ ,  $O'$ ,  $O''$  estão situados em linha recta, faltou considerar o caso em que um dos systemas  $(X_0, X_1, X_2)$ ,  $(Y_0, Y_1, Y_2)$  se equilibra em todas as configurações.

Supponhamos pois que  $O'$  é o centro das duas forças parallelas  $X_0, X_2$ , o que aniquila o binario gyrante  $(X_0, X_1, X_2)$ ; neste caso o outro binario  $(Y_0, Y_1, Y_2)$  não pôde aniquilar-se tambem, pois que se fosse igualmente  $O'$  o centro das forças parallelas  $Y_0, Y_2$ , seguir-se-hia serem  $Q, Q''$  parallelas, o que é inadmissivel.



§ 94.

Convem que seja rectificado da seguinte maneira o que dissemos neste parographo. Quando na decomposição das forças gyrantes se toma vg. o plano  $YCZ$  paralelo a  $R$ , sem que esta linha seja parallela a nenhum dos eixos, deve em geral obter-se duas forças gyrantes parallelas a  $CY$ , e  $CZ$ , e um binario gyrante cujas forças são parallelas a  $CX$ . Nesta especie de redução temos a considerar os seguintes casos.

- 1.° Se os dous centros  $O'$ ,  $O''$  se achão reunidos n'um só ponto, e é nullo o momento maximo do binario gyrante, o systema de forças dado reduz-se a uma só força gyrante.
- 2.° Se  $O'$ ,  $O''$  coincidirem, e não for nullo o dito momento maximo, o systema reduz-se a uma força e um binario gyrantes.
- 3.° Se sendo distinctos aquelles dous centros, for nullo o

indicado momento maximo, as duas forças gyrantes reduzem-se a uma força, e a um binario gyrantes, para o que bastará transportar uma das forças para o centro da outra; a resultante dessas duas forças não será parallela ás forças do binario gyrante.

4.º Se sendo distinctos os centros  $O'$ ,  $O''$ , não coincidirem os centros  $O$ ,  $O_1$  do binario resultante, nem forem nullas as forças deste, teremos a considerar as duas hypotheses de serem, ou deixarem de ser parallelas as linhas  $O'O''$ ,  $OO_1$ . Suppondo essas linhas parallelas, transportaremos o binario de modo que coincidão os pontos  $O'$ ,  $O$ : as forças applicadas a estes pontos reduzem-se a uma só, a qual nem será parallela a nenhuma das forças applicadas a  $O''$ , e  $O_1$ , nem ao plano dellas. O systema gyrante fica pois reduzido a tres forças gyrantes divergentes applicadas a centros em linha recta, e por conseguinte é reduzivel a duas forças gyrantes applicadas a centros distinctos, isto é, a uma força gyrante, e a um binario gyrante. Não sendo porém parallelas  $O'O''$ ,  $OO_1$ , fazendo coincidir os pontos  $O'$ ,  $O$ , é facil de ver que o systema se reduz a tres forças divergentes applicadas a centros distinctos não situados em linha recta, e por conseguinte equivale a uma força gyrante, e a dous binarios gyrantes ir-reduziveis.



### § 98.

O quadro que apresentámos neste paragrapho devia ser completado com o caso de, na decomposição das forças gyrantes, se tomar  $R$  parallela vg. ao plano  $YCZ$ , não sendo porém parallela a  $CY$ , nem a  $CZ$ . Teriamos pois nesta hypothesis a seguinte correspondencia statica dos systemas gyrantes:

- 1.ª Classe... { Duas forças gyrantes applicadas a um só ponto, isto é, uma só força gyrante.

- 2.<sup>a</sup> Classe ...  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Duas forças gyrantes em um só centro, e um binario gyrante; ou duas forças gyrantes em centros distinctos; ou essas duas forças e um binario gyrante cujo braço seja paralelo á linha d'união daquelles dous centros.} \end{array} \right.$
- 3.<sup>a</sup> Classe ...  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Duas forças gyrantes em centros distinctos, e um binario gyrante cujo braço não seja paralelo á linha d'união daquelles dous centros.} \end{array} \right.$

Em quanto aos caracteres analyticos, é facil de ver que teremos para a primeira classe:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma xX = \Sigma yX = \Sigma zX = 0 \\ \frac{\Sigma xY}{Y} = \frac{\Sigma xZ}{Z}; \frac{\Sigma yY}{Y} = \frac{\Sigma yZ}{Z}; \frac{\Sigma zY}{Y} = \frac{\Sigma zZ}{Z} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (L).$$

Para a segunda classe, designando por  $X_1$  a somma das componentes positivas paralelas a  $CX$ , será

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Sigma xZ}{Z} - \frac{\Sigma xY}{Y} = \frac{\Sigma yZ}{Z} - \frac{\Sigma yY}{Y} = \frac{\Sigma zZ}{Z} - \frac{\Sigma zY}{Y} \\ \frac{\Sigma xX}{X_1} = \frac{\Sigma yX}{X_1} = \frac{\Sigma zX}{X_1} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (M)$$

condições que comprehendem como caso particular a primeira, ou a segunda das condições complexas (L).

Finalmente para a terceira classe deverão não verificarse nem as condições (L), nem as condições (M).

==

§ 100.

As formulas (79) mnemonisão-se facilmente escrevendo em vez de  $a, a', a'', b$ , etc.  $\text{Cos } X'X, \text{Cos } X'Y, \text{Cos } X'Z$ ,

etc., tendo sempre o cuidado de pôr em primeiro logar as letras accentuadas  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ : ver-se-ha então que quando no primeiro membro temos um coseno em que entrão duas letras diferentes, o valor delle consta de dous termos dos quaes o ultimo é  $(1 - \text{Cos } \omega)$  multiplicado pelos cosenos correspondentes áquellas duas letras; e o primeiro é  $\text{Sen } \omega$  multiplicado pelo coseno da terceira letra, tendo este termo o signal +, ou - conforme no primeiro membro apparecem duas das letras  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  por ordem directa, ou inversa.

Quando no primeiro membro entrão duas letras semelhantes o segundo termo do valor respectivo é formado por um modo analogo ao precedente, e o primeiro é simplesmente  $\text{Cos } \omega$ .

==

§ 123.

Se  $A'$ ,  $B'$ ,  $A''$ ,  $B''$  forem dous systemas de semidiámetros conjugados de uma ellipse enjos semieixos são  $A$ ,  $B$ , não poderá ser nunca simultaneamente  $A'$  perpendicular a  $A''$ , e  $B'$  a  $B''$ , a menos que a ellipse se não converta em circulo. Com effeito para que fossem perpendiculares aquellas linhas era necessario, que tivessesmos

$$\left. \begin{aligned} A'^2 \text{Cos}^2 \alpha + B'^2 \text{Cos}^2 \alpha' &= A^2 = A''^2 \text{Sen}^2 \alpha + B''^2 \text{Sen}^2 \alpha' \\ A'^2 \text{Sen}^2 \alpha + B'^2 \text{Sen}^2 \alpha' &= B^2 = A''^2 \text{Cos}^2 \alpha + B''^2 \text{Cos}^2 \alpha' \\ A'^2 \text{Sen } \alpha \text{Cos } \alpha + B'^2 \text{Sen } \alpha' \text{Cos } \alpha' &= A''^2 \text{Sen } \alpha \text{Cos } \alpha + B''^2 \text{Sen } \alpha' \text{Cos } \alpha' = 0 \end{aligned} \right\} \cdot (N);$$

Suppondo que não é  $\text{Sen } \alpha \text{Cos } \alpha = 0$ , isto é, suppondo que  $A'$ , e  $A''$  não tem a direcção de  $A$ , ou de  $B$ , concluiremos das duas ultimas equações (N)

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''}; \text{ donde } A' = pA''; B' = pB'';$$

valores que substituidos nas quatro primeiras equações (N) dão

$$A^2 = p^2 B^2; B^2 = p^2 A^2;$$

e por conseguinte

$$p = 1; A = B.$$

====

§ 150.

As duas series de configurações em que ha resultante unica, e que são dadas pela formula (159), conforme se adopta uma, ou outra das duas configurações iniciais em que é tambem  $M' = 0$ , só apparentemente são distinctas, por quanto todas as configurações de uma das series são comprehendidas na outra, e reciprocamente. Com effeito consideremos uma configuração  $M' = 0$  dada pela serie, a que corresponde a configuração inicial em que as forças positivas  $X_i, Y_i$  dos binarios resultantes tem respectivamente os sentidos do primeiro, e segundo eixos principaes negativos. Essa configuração deduzir-se-ha da configuração inicial, em que  $X_i, Y_i$  tem sentidos oppostos aos indicados, por meio de duas rotações, uma de  $180^\circ$  sobre  $OZ$ , outra  $\omega$  sobre um eixo determinado; por conseguinte a configuração dada procederá da configuração inicial, que mencionámos ultimamente, por meio de uma só rotação  $\omega'$  sobre um eixo determinado: logo essa configuração proposta deve tambem achar-se na serie dada pela equação (159), quando se toma por configuração inicial aquella em que  $X_i, Y_i$  tem as direcções, e sentidos do primeiro, e segundo eixos principaes positivos.

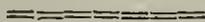
Semelhantemente se prova que se reduzem a duas as quatro series dadas por cada uma das equações (160, 161), e a uma só as duas series dadas por (162).



§ 158.

A demonstração deste paragrapho podia simplificar-se em vista do que se disse (§ 156). Com effeito tendo-se conhecido que deve haver equilibrio em todas as configurações nos tres binarios ( $AA', X_i$ ), ( $BB', Y_i$ ), ( $CC', Z_i$ ), como as tres forças  $X_i, Y_i, Z_i$  são divergentes no espaço, e nenhuma dellas é zero, conclue-se do citado (§ 156), que um dos tres braços  $AA', BB', CC'$  se deve aniquilar, e por conseguinte (§ 78), teremos

$$AA' = BB' = CC' = 0.$$



ERRATA.



§§	lin.	Erros.	Emendas.
63	.... 2....	nem os braços, nem as forças .....	as forças não
94	... 3,4 ...	suppor-se.....	suppor-se applicadas
158	.. antepen... (§ 21).....		(§ 78)