JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS

PHYSICAS E NATURAES

PUBLICADO SOB OS AUSPICIOS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

TOMO I

NOVEMBRO DE 1866 — DEZEMBRO DE 1867

LISBOA

TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA

1868

I. MATHEMATICA

1. Nota sobre alguns theoremas novos de statica

POR

DANIEL AUGUSTO DA SILVA

Seja um systema qualquer de forças no espaço P, P', etc., que decompostas em relação a tres eixos rectangulares dêem as componentes

$$X,\ Y,\ Z,\quad X',\ Y',\ Z',\ \text{etc.},$$

e os binarios componentes

$$L,\ M,\ N,\quad L',\ M',\ N',\ \text{etc.}$$

Sendo R a resultante das forças, G a dos binarios, e θ o angulo formado por R, e pelo eixo de G, temos

$$R=\sqrt{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2};$$

$$RG\cos\theta=\Sigma X\Sigma L+\Sigma Y\Sigma M+\Sigma Z\Sigma N\ldots\ldots\quad (A).$$

O valor de R póde exprimir-se immediatamente pela grandeza das forças dadas, e das suas inclinações reciprocas, pois que como é sabido

$$R=\sqrt{\Sigma P^2+2\Sigma PP'\cos PP'}.$$

Mostraremos como tambem o primeiro membro da equação (A), que dá o binario resultante minimo

$$K=\pm G\cos\theta,$$

póde egualmente exprimir-se sem referencia a eixos coordenados.

Para o conseguir tomemos a funcção

$$S = \Sigma\,[(X+X')(L+L')+(Y+Y')(M+M')+(Z+Z')(N+N')],$$

em que Σ designa a somma de todas as funcções analogas á expressa, obtidas combinando as forças duas a duas.

Sendo n o numero das forças P, P', etc., os termos de S respectivamente multiplicados por X, por Y, e por Z, serão:

$$\begin{gathered} X\Sigma L+(n-2)XL, \\ Y\Sigma M+(n-2)YM, \\ Z\Sigma N+(n-2)ZN: \end{gathered}$$

e como é

$$XL+YM+ZN=o,$$

sommando as tres precedentes addições, teremos

$$X\Sigma L+Y\Sigma M+Z\Sigma N,$$

e por conseguinte

$$S=\Sigma X\Sigma L+\Sigma Y\Sigma M+\Sigma Z\Sigma N=RG\cos\theta=\pm RK,$$

em que visivelmente deverá ser adoptado o signal $+$ quando R, e o eixo de K tiverem o mesmo sentido, e o signal $-$ no caso contrario.

Se tomarmos duas quaesquer P, P' das forças dadas; se for r a sua resultante, e k o seu minimo binario resultante, será, pela equação precedente

$$\pm kr=(X+X')(L+L')+(Y+Y')(M+M')+(Z+Z')(N+N'),$$

e por conseguinte

$$S=\Sigma\pm kr=\pm KR \ldots\ldots \quad (B),$$

isto é, o producto da resultante total R, pelo binario resultante total minimo K, egual á somma algebrica de todos os productos analogos, que se obtem combinando as forças dadas duas a duas.

É facil designar a condição geometrica, que na equação (B) deve fixar o signal de KR, e de cada um dos productos kr. Com effeito, sendo v. g.

$$kr=\pm rg\cos\theta_{,},$$

em que g exprime um qualquer dos binarios resultantes de P, e P', e $\theta_{,}$ o angulo que o seu eixo faz com a direcção de r, dever-se-ha em B tomar para kr o signal $+$, ou $-$ conforme for

$$\theta_{,} <, \text{ ou } > 90^{\circ}.$$

Se imaginarmos a perpendicular pp' commum ás forças P, e P', e encontrando-as respectivamente nos pontos p, p', ver-se-ha, que para um observador situado parallelamente a pp', e com a cabeça para o lado v. g. de p, será

$$\theta_{,} < > 90^{\circ},$$

conforme o plano que passar por pp', e P tenha de girar em torno da primeira linha da esquerda para a direita, ou viceversa para passar por P'.

Se a cabeça do observador se voltasse para p', e o plano girante passasse por P', seria

$$\theta_{,} < > 90^{\circ},$$

conforme fosse para a direita, ou para a esquerda a rotação, que faria passar esse plano por P.

Verificada a condição geometrica precedente para o caso de ser pp' perpendicular simultaneamente ás duas forças P, P', não haverá difficuldade em reconhecer, que uma condição perfeitamente analoga se realisa suppondo que pp' tem uma inclinação qualquer relativamente ás mesmas forças.

Exprimiremos agora cada um dos productos kr pelas grandezas P, P', pela sua inclinação reciproca ω, e pela sua distancia pp'.

Imaginemos P, P' respectivamente applicadas aos pontos p, p', e ahi cada uma d'ellas decomposta em duas forças, uma das quaes seja parallela a r. Sendo φ, φ' os angulos que com r fazem P, P'; o eixo central dos momentos encontrará pp', em um ponto x, cuja posição será dada pelas proporções

$$r : P \cos\varphi :: pp' : p'x :$$
$$r : P' \cos\varphi' :: pp' : px.$$

Reconhece-se tambem que o binario resultante

$$k = P \operatorname{sen}\varphi \,.\, px + P' \operatorname{sen}\varphi' \,.\, p'x \ldots\ldots \quad (C),$$

advertindo que a generalidade d'esta equação, bem como a das proporções antecedentes, é dada pelos signaes de cos φ, cos φ', px, $p'x$.

Substituindo em (C) os valores de px, $p'x$, acharemos

$$k=\frac{PP'.pp'(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi'+\operatorname{sen}\varphi'\cos\varphi)}{r}=$$

$$=\frac{PP'.pp'\operatorname{sen}(\varphi+\varphi')}{r}=\frac{PP'.pp.\operatorname{sen}\omega}{r},$$

d'onde

$$kr=PP'.pp'.\operatorname{sen}\omega,$$

e por conseguinte

$$\pm RK=\Sigma\pm PP'.pp'.\operatorname{sen} PP'\ldots\ldots\quad (D),$$

que dá o valor procurado de K, independentemente de qualquer systema de eixos.

No segundo membro da equação precedente, não ha a combinar entre si nem as forças parallelas, nem as concorrentes.

A equação (D) fornece tambem, sem referencia a eixos coordenados, a condição da existencia de uma só resultante.

Essa condição é

$$\Sigma\pm PP'.pp'.\operatorname{sen} PP'=o\ldots\ldots\quad (E),$$

com tanto porém que não seja

$$R^2=\Sigma(P^2+2PP'\cos PP')=o.$$

A equação (D) póde ter uma simples representação geometrica: com effeito

$$kr=PP'.pp'.\operatorname{sen} PP',$$

exprime o volume de um parallelipedo, que tem por lados contiguos de uma das bases P, e uma parallela a P', e na base opposta P', e uma parallela a P, sendo os vertices respectivos ligados pela aresta pp'. Se chamarmos esse volume o parallelipipedo das duas forças P, P'; e se suppozermos que R, K equivalem ás duas resultantes rectilineas $R_{/}$, $R_{//}$, reconhecer-se-ha que (D) exprime, que «o parallelipipedo das duas resultantes $R_{/}$, $R_{//}$ do systema dado é egual á somma algebrica dos parallelipipedos de todas as forças tomadas duas a duas.»

Já dissemos anteriormente como é fixado o signal de cada um d'esses termos.

O ultimo enunciado póde generalisar-se ainda, suppondo, que qualquer das linhas pp' liga dois pontos quaesquer respectivamente tomados sobre P, P', por quanto o volume do respectivo parallelipipedo é visivelmente egual ao que se obtem quando pp' é a minima distancia entre as duas forças.

Se suppozessemos, que as forças dadas P, P', etc. se combinavam tres a tres, e tomassemos um grupo qualquer

$$P, P', P'',$$

cuja resultante, e cujo binario resultante minimo fossem r_3, k_3 teriamos (B)

$$\pm k_3 r_3 = \pm kr \pm k'r' \pm k''r'',$$

e por conseguinte

$$\Sigma \pm k_3 r_3 = \Sigma (\pm kr \pm k'r' \pm k''r'');$$

e sendo o numero dos grupos do primeiro membro

$$n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3},$$

e o dos grupos Σkr das forças combinadas duas a duas

$$n \frac{n-1}{2},$$

segue-se que

$$\Sigma \pm k_3 r_3 = (n-2) \Sigma \pm kr = \pm (n-2) KR,$$

Semelhantemente, tomando as forças quatro a quatro acharemos

$$\Sigma \pm k_4 r_4 = \pm (n-2) \frac{n-3}{2} KR,$$

e assim por diante.