MEMORIAS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

CLASSE DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

Nise utile est quod facimus, stulta est gloria

NOVA SERIE—TOMO V, PARTE I

LISBOA

TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA

Sm 1875

DE VARIAS FORMULAS NOVAS

DE

GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS AOS EIXOS COORDENADOS OBLIQUOS

POR

DANIEL AUGUSTO DA SILVA

---

1. Representaremos por H o volume do parallelipipedo determinado pelos tres eixos coordenados obliquos OX, OY, OZ, como arestas, tendo cada uma d'ellas a grandeza 1.

É facil de ver, que será $H = \text{sen}\,(X, Y)\ \text{sen}\,(Z, XY)$.

Depois daremos as diversas outras expressões, que póde ter H.

2. Em uma recta qualquer AP, da grandeza P, se tomarmos na sua direcção a extensão 1, representaremos essa linha por p, e as suas projecções obliquas sobre os tres eixos por p_x, p_y, p_z. Com essas convenções, se imaginarmos no espaço duas rectas concorrentes AP, AP'; a normal N commum a ambas, fará com os tres eixos angulos, cujos cosenos serão dados por as seguintes formulas

$$\left.\begin{aligned}
\text{Cos}\,(N, X) &= \frac{H\,(p_y p'_z - p'_y p_z)}{\text{sen}\ p\,p'} \\
\text{Cos}\,(N, Y) &= \frac{H\,(p_z p'_x - p'_z p_x)}{\text{sen}\ p\,p'} \\
\text{Cos}\,(N, Z) &= \frac{H\,(p_x p'_y - p'_x p_y)}{\text{sen}\ p\,p'}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

nas quaes o sentido da normal será tal, que, em relação a ella, AP, AP' tenham uma disposição analoga áquella, que tem OZ em relação a OX, OY.

Estas formulas são a generalisação das formulas analogas correspondentes aos eixos rectangulares, no qual caso é $H=1$.

3. As formulas precedentes podem-se deduzir da seguinte maneira.

A area s da projecção obliqua feita sobre o plano XY, do parallelogrammo S determinado pelas linhas Ap, Ap', ambas da grandeza 1, é dada pela equação

$$s = \operatorname{sen}(X, Y)\,(p_x p'_y - p'_x p_y)\ [1]$$

Ora s, e S dão a mesma projecção orthogonal sobre um plano perpendicular a OZ, isto é,

$$S \cos(N, Z) = s \operatorname{sen}(Z, XY) = \operatorname{sen} pp' \cos(N, Z);$$

d'onde

$$s = \frac{\operatorname{sen} pp' \cos(N, Z)}{\operatorname{sen}(Z, XY)},$$

e por conseguinte

$$\cos(N, Z) = \frac{\operatorname{sen}(Z, XY)\operatorname{sen}(X, Y)(p_x p'_y - p'_x p_y)}{\operatorname{sen} pp'},$$

ou

$$\cos(N, Z) = \frac{H\,(p_x p'_y - p'_x p_y)}{\operatorname{sen} pp'}.$$

E semelhantemente se deduzem os valores de $\cos(N, X)$, $\cos(N, Y)$.

4. O angulo, que formam entre si duas rectas P, P', situadas de qualquer modo no espaço, e cujo seno entra nas formulas precedentes, póde ser dado pelas projecções da unidade de cada uma d'essas linhas, feitas em relação a um systema de eixos obliquos.

[1] Esta formula equivale á que achámos na memoria *Da Transformação e reducção dos binarios*, *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, 2.ª serie, tom. III, part. II, § 35.

Com effeito, imaginando passarem pela origem O duas rectas OA, OA' parallelas áquell'outras, e tomando sobre estas as grandezas

$$oa=oa'=1,$$

a distancia aa' póde ser considerada, ou como lado do triangulo oaa', ou como diagonal de um parallelipipedo, cujas arestas contiguas são $a_x-a'_x$, $a_y-a'_y$, $a_z-a'_z$.

Estas duas accepções de aa' dão a equação

$$a_x^2+a_y^2+a_z^2+2a_xa_y\cos XY+2a_ya_z\cos YZ+2a_xa_z\cos XZ$$

$$a'^2_x+a'^2_y+a'^2_z+2a'_xa'_y\cos XY+2a'_ya'_z\cos YZ+2a'_xa'_z\cos XZ$$

$$-2\cos AA'=$$

$$(a_x-a'_x)^2+(a_y-a'_y)^2+(a_z-a_z)^2+2(a_x-a'_x)(a_y-a'_y)\cos XY$$

$$+2(a_y-a'_y)(a_z-a'_z)\cos YZ+2(a_x-a'_x)(a_z-a'_z)\cos XZ;$$

d'onde reduzindo acharemos

$$\cos AA'=a_xa'_x+a_ya'_y+a_za'_z+(a_xa'_y+a'_xa_y)\cos XY$$

$$+(a_ya'_z+a'_ya_z)\cos YZ+(a_xa'_z+a'_xa_z)\cos XZ;$$

e semelhantemente

$$\left.\begin{array}{l}\cos pp'=p_xp'_x+p_yp'_y+p_zp'_z+(p_xp'_y+p'_xp_y)\cos XY\\(p_yp'_z+p'_yp_z)\cos YZ+(p_xp'_z+p'_xp_z)\cos XZ\end{array}\right\}\ldots\ldots(B)$$

5. A linha $p=1$ póde projectar-se orthogonalmente sobre cada um dos eixos obliquos por dois modos; ou directamente, ou projectando a linha quebrada composta das linhas p_x, p_y, p_z: a equivalencia das duas projecções para cada eixo, dá as seguintes equações:

$$\left.\begin{aligned} \cos(p, X) &= p_x + p_y \cos XY + p_z \cos XZ \\ \cos(p, Y) &= p_y + p_x \cos XY + p_z \cos YZ \\ \cos(p, Z) &= p_z + p_x \cos XZ + p_y \cos YZ \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C)$$

Estas equações mudam (B) em

$$\cos pp' = p'_x \cos(p, X) + p'_y \cos(p, Y) + p'_z \cos(p, Z) \ldots. (D)$$

formula que se obtem directamente, advertindo que a projecção de p' sobre p, equivale á projecção, sobre esta ultima, feita pela linha quebrada composta das rectas p'_x, p'_y, p'_z.

6. A formula (B) dá indirectamente, por meio das projecções de p, e p', o valor de sen pp', que entra nas formulas (A). Podemos tambem exprimir directamente sen pp' por meio das mesmas projecções.

Com effeito é

$$\operatorname{sen}^2 pp' = 1 - \cos^2 pp' = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2p_x p_y \cos XY + 2p_y p_z \cos YZ + 2p_x p_z \cos XZ)$$

$$\times (p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z + 2p'_x p'_y \cos XY + 2p'_y p'_z \cos YZ + 2p'_x p'_z \cos XZ,$$

$$-\left(p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z + (p_x p'_y + p'_x p_y) \cos XY + (p_y p'_z + p'_y p_z) \cos YZ + (p_x p'_z + p'_x p_z) \cos XZ\right)^2$$

Desenvolvendo, reduzindo, e reunindo os termos analogos, acharemos

$$\operatorname{sen}^2 pp'=(p_xp'_y-p'_xp_y)^2\operatorname{sen}^2 XY+(p_yp'_z-p'_yp_z)^2\operatorname{sen}^2 YZ+(p_zp'_x-p'_zp_z)^2\operatorname{sen}^2 ZX$$

$$\left.\begin{aligned}
&-2(p_yp'_z-p'_yp_z)(p_zp'_x-p'_zp_x)\cos XY\\
&-2(p_zp'_x-p'_zp_x)(p_xp'_y-p'_xp_y)\cos YZ\\
&-2(p_xp'_y-p'_xp_y)(p_yp'_z-p'_yp_z)\cos ZX\\
&+2(p_xp'_y-p'_xp_y)(p_yp'_z-p'_yp_z)\cos XY\cos YZ\\
&+2(p_yp'_z-p'_yp_z)(p_zp'_x-p'_zp_x)\cos YZ\cos ZX\\
&+2(p_zp'_x-p'_zp_x)(p_xp'_y-p'_xp_y)\cos ZX\cos XY
\end{aligned}\right\}\ldots(E)$$

Achamos pois sen pp' expresso nos angulos dos eixos coordenados, e nas tres funcções

$$p_xp'_y-p'_xp_y,\qquad p_yp'_z-p'_yp_z,\qquad p_zp'_x-p'_zp_x,$$

que são as tres projecções do parallelogrammo determinado por p, e p', feitas sobre os tres planos coordenados, e respectivamente divididas pelo seno do angulo dos dois eixos existentes em cada plano de projecção.

7. A formula (E) simplifica-se muito, introduzindo n'ella os angulos dos planos coordenados, que representaremos por X, Y, Z; pois que é, pelas relações conhecidas,

$$\cos XY=\cos Z\operatorname{sen} XZ\operatorname{sen} ZY+\cos XZ\cos ZY;$$

$$\cos YZ=\cos X\operatorname{sen} XY\operatorname{sen} XZ+\cos XY\cos XZ;$$

$$\cos ZX=\cos Y\operatorname{sen} XY\operatorname{sen} YZ+\cos XY\cos YZ;$$

as quaes mudam (E) em

$$\operatorname{sen}^2 pp' = (p_x p'_y - p'_x p_y)^2 \operatorname{sen}^2 XY + (p_y p'_z - p'_y p_z)^2 \operatorname{sen}^2 YZ + (p_z p'_x - p'_z p_x)^2 \operatorname{sen}^2 ZX$$

$$\left.\begin{aligned} & -2(p_y p'_z - p'_y p_z)(p_z p'_x - p'_z p_x) \cos Z \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} ZX \\ & -2(p_z p'_x - p'_z p_x)(p_x p'_y - p'_x p_y) \cos X \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} XZ \\ & -2(p_x p'_y - p'_x p_y)(p_y p'_z - p'_y p_z) \cos Y \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} YZ \end{aligned}\right\} \ldots (E')$$

E se designarmos por A, B, C as projecções obliquas do parallelogrammo pp' sobre os tres planos YZ, ZX, XY, será

$$\operatorname{sen}^2 pp' = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos Z - 2BC \cos X - 2CA \cos Y \ldots\ldots (F)$$

8. Se multiplicarmos por $\frac{1}{4}$ todos os termos da equação precedente, e representarmos o triangulo formado por pp', e as suas projecções obliquas sobre os tres planos por

$$t, \quad t_{yz}, \quad t_{zx}, \quad t_{xy},$$

será

$$t^2 = t^2_{yz} + t^2_{zx} + t^2_{xy} - 2\, t_{yz} t_{zx} \cos Z - 2 t_{xz} t_{xy} \cos X - 2 t_{xy} t_{yz} \cos Y.$$

A propriedade, que representa a equação precedente em relação ao triangulo pp', cujos lados p, p' tem a grandeza 1, subsistiria para qualquer grandeza d'esses lados, o que equivaleria a multiplicar essa equação por $p^2 . p'^2$.

9. D'essa propriedade, correspondente a um triangulo qualquer, conclue-se facilmente um theorema analogo para qualquer polygono.

Teremos pois em relação a uma area qualquer S, e ás suas projecções obliquas nos tres planos, a seguinte equação

$$S^2 = S^2_{yz} + S^2_{zx} + S^2_{xy} - 2 S_{yz} S_{zx} \cos Z - 2 S_{zx} S_{xy} \cos X - 2 S_{xy} S_{yz} \cos Y \; (G)$$

10. Esta formula, que póde exprimir a relação entre um binario e os seus tres componentes em planos coordenados obliquos, resulta immediatamente de

que o eixo d'aquelle será diagonal do parallelipipedo, cujas arestas contiguas são os eixos dos componentes, advertindo que o angulo de dois d'estes ultimos eixos é supplemento do angulo dos planos coordenados respectivos.

11. A formula (G) corresponde á equação, que liga uma recta qualquer A com as suas projecções obliquas sobre os tres eixos, isto é,

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 + 2A_xA_y \cos XY + 2A_yA_z \cos YZ + 2A_zA_x \cos ZX \ldots (G')$$

(G), e (G') representam casos particulares, para o tetraedro, e para o triangulo, dos theoremas geraes, que ligam entre si as faces de um polyedro, e os lados de um polygono; pois que os lados d'estes figuram um equilibrio de forças, bem como as faces d'aquelles um equilibrio de binarios [1].

12. Se na equação (E') substituirmos ás tres funcções $p_xp'_y - p'_xp_y$, etc., os seus valores dados pelas formulas (A), acharemos, sendo ON uma recta qualquer passando pela origem O,

$$\begin{aligned} H^2 = {} & \cos^2 NZ \operatorname{sen}^2 XY + \cos^2 NX \operatorname{sen}^2 YZ + \cos^2 NY \operatorname{sen}^2 ZX \\ & - 2 \cos NX \cos NY \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} ZX \cos Z \\ & - 2 \cos NY \cos NZ \operatorname{sen} ZX \operatorname{sen} XY \cos X \\ & - 2 \cos NZ \cos NX \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} YZ \cos Y \end{aligned}$$

equação de condição, que liga os tres angulos NX, NY, NZ, da qual é caso particular, para a hypothese de serem os eixos rectangulares, a conhecida relação

$$1 = \cos^2 NZ + \cos^2 NX + \cos^2 NY.$$

13. Passaremos a fazer algumas applicações das formulas (A)

Na memoria citada ácerca da theoria dos binarios, conseguimos obter, para o caso dos eixos coordenados obliquos, a vantagem da decomposição directa d'um binario em tres planos coordenados, vantagem que realisaram para os eixos rectangulares as formulas de Duhamel.

As nossas formulas (A) ministram-nos outro meio de chegar tambem á mesma decomposição directa.

Seja $AP = P$ uma força qualquer applicada ao ponto A, que dê, transportada á origem O, o binario cujo braço obliquo seja OA.

[1] Vide a Memoria precedentemente citada § 21.

Represente k o momento d'esse binario, e sejam L sen YZ, M sen XZ, N sen XY os seus componentes nos tres planos coordenados.

Sendo n normal ao plano OAP, será k cos (n, X) a acção de k em relação ao eixo OX; e como os binarios M sen XZ, N sen XY tem uma acção nulla em relação ao mesmo eixo, por este existir no plano d'elles, será

$$k \cos (n, X) = L \operatorname{sen} YZ \times \operatorname{sen} (X, YZ) \ldots\ldots\ (H)$$

Representando A a grandeza OA, e exprimindo por a, e p as grandezas eguaes á unidade tomadas sobre A, e P, teremos pelas formulas (A)

$$\cos (n, X) = \frac{H(a_y p_z - p_y a_z)}{\operatorname{sen} a p};$$

mas é

$$k = PA \operatorname{sen} pa;$$

logo (H) muda-se em

$$HPA\,(a_y p_z - p_y a_z) = L \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} (X, YZ) \ldots\ldots\ (I)$$

Ora sendo x, y, z as coordenadas de A; e X, Y, Z as componentes de P, acha-se

$$Aa_y = y;\ Aa_z = z;\ Pp_z = Z;\ Pp_y = Y;$$

e por conseguinte transformando (I), e escrevendo as formulas, que semelhantemente se deduzem para os outros eixos, teremos

$$L \operatorname{sen} YZ = \operatorname{sen} YZ\,(yZ - zY);$$
$$M \operatorname{sen} ZX = \operatorname{sen} ZX\,(zX - xZ);$$
$$N \operatorname{sen} XY = \operatorname{sen} XY\,(xY - yX);$$

d'onde se conclue, que para um numero qualquer de forças no espaço P, P', etc. serão os binarios totaes existentes em cada um dos tres planos coordenados

$$\operatorname{sen} YZ \Sigma L = \operatorname{sen} YZ \Sigma\,(yZ - zY);$$
$$\operatorname{sen} ZX \Sigma M = \operatorname{sen} ZX \Sigma\,(zX - xZ);$$
$$\operatorname{sen} XY \Sigma N = \operatorname{sen} XY \Sigma\,(xY - yX).$$

14. A formula (D) dá immediatamente a condição necessaria para a perpendicularidade de duas rectas p, p', isto é, deveremos ter n'esse caso

$$o = p'_x \cos(p, X) + p'_y \cos(p, Y) + p'_z \cos(p, Z).$$

15. Tambem a mesma formula (D) nos poderá ministrar uma expressão nova, para o caso dos eixos coordenados obliquos, do angulo, que entre si formam a resultante R de um systema qualquer de forças, com o eixo do binario resultante K.

Com effeito, designando esse angulo por RK, e por KX, KY, KZ os angulos do eixo de K com os eixos coordenados, será

$$\cos RK = r_x \cos KX + r_y \cos KY + r_z \cos KZ;$$

e multiplicando a equação precedente por RK, e exprimindo por ΣX, ΣY, ΣZ as sommas das componentes das forças dadas, será

$$RK \cos RK = \Sigma X.\ K \cos KX + \Sigma Y.\ K \cos KY + \Sigma Z.\ K \cos KZ \ldots (J)$$

Ora da equação (H) conclue-se

$$K \cos KX = \Sigma L.\ \text{sen}\ YZ\ \text{sen}\ (X, YZ) = H \Sigma L;$$

e semelhantes formulas teremos para os outros dois eixos; taes relações mudarão por tanto (J) em

$$RK \cos RK = H\,(\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N) \ldots\ldots\ldots\ldots (K)$$

generalisação da formula conhecida para o caso dos eixos rectangulares, na qual hypothese é $H = 1$.

16. De (K) se deduz a condição necessaria para a existencia da resultante unica, isto é, n'esse caso, ter-se-ha

$$o = \Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N.$$

17. Na equação (K) R póde exprimir-se pelas componentes de cada força, isto é,

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2 + 2 \Sigma X \Sigma Y \cos XY$$
$$+ 2 \Sigma Y \Sigma Z \cos YZ + 2 \Sigma Z \Sigma X \cos ZX.$$

Semelhantemente teremos

$$K^2 = \text{sen}^2 YZ\,(\Sigma L)^2 + \text{sen}^2 ZX\,(\Sigma M)^2 + \text{sen}^2 XY\,(\Sigma N)^2$$

$$-2\Sigma L \Sigma M \text{ sen } YZ \text{ sen } ZX \cos Z$$
$$-2\Sigma L \Sigma N \text{ sen } YZ \text{ sen } XY \cos Y$$
$$-2\Sigma M \Sigma N \text{ sen } YX \text{ sen } XZ \cos X.$$

18. Os tres angulos, que o eixo de K faz com os eixos coordenados, são, como vimos precedentemente, dados pelas equações

$$\cos KX = \frac{H}{K}\Sigma L;\ \cos KY = \frac{H}{K}\Sigma M;\ \cos KX = \frac{H}{K}\Sigma N,$$

formulas, que apenas differem das relativas aos eixos coordenados rectangulares, em que, para estes, é $H=1$.

19. Seja para um systema de eixos obliquos OX', OY', OZ', designado por H' o parallelipipedo determinado pelas tres grandezas respectivamente tomadas sobre esses eixos $a'=b'=c'=1$; teremos sempre a relação

$$\frac{H'}{H} = a'_x b'_y c'_z - a'_x b'_z c'_y + a'_y b'_z c'_x - a'_y b'_x c'_z + a'_z b'_x c'_y - a'_z b'_y c'_x \ldots . \quad (L)$$

Esta formula é conhecida no caso de serem rectangulares os eixos OX, OY, OZ, na qual hypothese é $H=1$.

As formulas (A) conduzir-nos-hão directamente á demonstração da equação (L). Com effeito o seu segundo membro equivale a

$$a'_x(b'_y c'_z - b'_z c'_y) + a'_y(b'_z c'_x - b'_x c'_z) + a'_z(b'_x c'_y - b'_y c'_x),$$

que, em vista das equações (A), e representando por N a normal ao plano $Y'Z'$, se muda em

$$\frac{\text{sen } Y'Z'}{H}\Big(a'_x \cos(N, X) + a'_y \cos(N, Y) + a'_z \cos(N, Z)\Big),$$

isto é

$$\frac{\text{sen } Y'Z'}{H}\cos(a', N) = \frac{\text{sen } Y'Z' \text{ sen } (X', Y'Z')}{H} = \frac{H'}{H},$$

como se pretendia demonstrar.

20. Para passar das coordenadas relativas ao systema $OX'Y'Z'$ para as correspondentes ao systema $OXYZ$, temos as equações

$$\left.\begin{aligned} x &= a'_x x' + b'_x y' + c'_x z' \\ y &= a'_y x' + b'_y y' + c'_y z' \\ z &= a'_z x' + b'_z y' + c'_z z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

Semelhantemente teremos

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{x'} x + b_{x'} y + c_{x'} z \\ y' &= a_{y'} x + b_{y'} y + c_{y'} z \\ z' &= a_{z'} x + b_{z'} y + c_{z'} z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

De (M) póde passar-se para (N), e reciprocamente, pelos processos de eliminação.

As formulas respectivas dão para o denominador commum, partindo de (M),

$$D = a'_x b'_y c'_z - a'_x b'_z c'_y + a'_y b'_z c'_x - a'_y b'_x c'_z + a'_z b'_x c'_y - a'_z b'_y c'_x;$$

e partindo de (N)

$$D' = a_{x'} b_{y'} c_{z'} - a_{x'} b_{z'} c_{y'} + a_{y'} b_{z'} c_{x'} - a_{y'} b_{x'} c_{z'} + a_{z'} b_{x'} c_{y'} - a_{z'} b_{y'} c_{x'};$$

ora é,

$$D = \frac{H'}{H}; \quad \text{e} \quad D' = \frac{H}{H'};$$

logo

$$DD' = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (O)$$

21. Se tivessemos dois systemas de eixos obliquangulos OXY, $OX'Y'$, situados no mesmo plano, teriamos semelhantemente

$$x = a'_x x' + b'_x y';$$
$$y = a'_y x' + b'_y y';$$

$$x' = a_{x'} x + b_{x'} y;$$
$$y' — a_{y'} x + b_{y'} y;$$

e os denominadores commums para os dois grupos, sendo h, h' as areas dos parallelogrammos determinados por a, b, e por a', b', seriam

$$d = a'_x b'_y — a'_y b'_x = \frac{h'}{\text{sen } XY} = \frac{h'}{h};$$

$$d' = a_{x'} b_{y'} — a_{y'} b_{x'} = \frac{h}{\text{sen } X'Y'} = \frac{h}{h'};$$

e por isso tambem n'este caso

$$d\,d' = 1.$$

Poderiamos ultimamente accrescentar, que se tivessemos uma só equação

$$x = a\,x',$$

a que corresponde a reciproca

$$x' = \frac{1}{a} x;$$

achar-se-hia, que é tambem 1 o producto dos dois denominadores.

22. Se em vez dos grupos (M), (N) tivessemos dois grupos analogos em que fosse qualquer m o numero das variaveis x, y, z, etc, ou x', y', z', etc., os denominadores commums D, D' dos dois grupos satisfariam sempre á relação

$$D\,D' = 1.$$

Posteriormente procuraremos, em outro escripto, dar a demonstração geral d'esse theorema.

23. Se applicarmos as formulas de eliminação ás equações (M), acharemos

$$x' = \frac{b'_y c'_z - b'_z c'_y}{D} x + \frac{b'_z c'_x - b'_x c'_z}{D} y + \frac{b'_x c'_y - b'_y c'_x}{D} z;$$

$$y' = \frac{c'_y a'_z - c'_z a'_y}{D} x + \frac{c'_z a'_x - c'_x a'_z}{D} y + \frac{c'_x a'_y - c'_y a'_x}{D} z;$$

$$z' = \frac{a'_y b'_z - a'_z b'_y}{D} x + \frac{a'_z b'_x - a'_x b'_z}{D} y + \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{D} z;$$

que comparadas com (N) produzem as equações de condição

$$\left.\begin{array}{l}
a_{x'} = \dfrac{b'_y c'_z - b'_z c'_y}{D}; \; b_{x'} = \dfrac{b'_z c'_x - b'_x c'_z}{D}; \; c_{x'} = \dfrac{b'_x c'_y - b'_y c'_x}{D}; \\[2ex]
a_{y'} = \dfrac{c'_y a'_z - c'_z a'_y}{D}; \; b_{y'} = \dfrac{c'_z a'_x - c'_x a'_z}{D}; \; c_{y'} = \dfrac{c'_x a'_y - c'_y a'_x}{D}; \\[2ex]
a_{z'} = \dfrac{a'_y b'_z - a'_z b'_y}{D}; \; b_{z'} = \dfrac{a'_z b'_x - a'_x b'_z}{D}; \; c_{z'} = \dfrac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{D};
\end{array}\right\} \ldots (P)$$

Com formulas analogas exprimiriamos os nove parametros a'_x, b'_x, c'_x, a'_y, etc. por meio dos parametros $a_{x'}$, $b_{x'}$, $c_{x'}$, $a_{y'}$, etc.

24. Os nove parametros de qualquer dos grupos (M), (N) podem ser sujeitos a seis equações de condição, em que entrem os angulos, que entre si fazem os eixos de cada um dos dois systemas.

Com effeito, se considerarmos o grupo (M), pela formula (B) teriamos as tres condições;

$$\cos X'Y' = a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z + (a'_x b'_y + b'_x a'_y) \cos XY$$
$$+ (a'_y b'_z + b'_y a'_z) \cos YZ + (a'_z b'_x + b'_z a'_x) \cos ZX;$$

$$\cos Y'Z' = b'_x c'_x + b'_y c'_y + b'_z c'_z + (b'_x c'_y + c'_x b'_y) \cos XY$$
$$(b'_y c'_z + c'_y b'_z) \cos YZ + (b'_z c'_x + c'_z b'_x) \cos ZX;$$

$$\cos Z'X' = c'_x a'_x + c'_y a'_y + c'_z a'_z + (c'_x a'_y + a'_x c'_y) \cos XY$$
$$(c'_y a'_z + a'_y c'_z) \cos YZ + (c'_z a'_x + a'_z c'_x) \cos ZX;$$

e pela formula (G')

$$1 = a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z + 2a'_x a'_y \cos XY + 2a'_y a'_z \cos YZ + 2a'_z a'_x \cos ZX;$$

$$1 = b'^2_x + b'^2_y + b'^2_z + 2b'_x b'_y \cos XY + 2b'_y b'_z \cos YZ + 2b'_z b'_x \cos ZX;$$

$$1 = c'^2_x + c'^2_y + c'^2_z + 2c'_x c'_y \cos XY + 2c'_y c'_z \cos YZ + 2c'_z c'_x \cos ZX.$$

Semelhantes equações estabeleceriamos para o grupo (N).

25. Sejam L, M, N as tres arestas contiguas de um parallelipipedo; V o seu volume; H o valor de V quando as tres arestas são eguaes á unidade: é sempre

$$V = LMNH.$$

Representemos respectivamente por l, m, n as tres distancias das faces MN, LN, LM ás suas oppostas parallelas; por a, b, c, os angulos formados por essas arestas, tomadas duas a duas, e por A, B, C os angulos diedros oppostos no mesmo angulo triedro; será

$$V = lMN \operatorname{sen} a = mNL \operatorname{sen} b = nLM \operatorname{sen} c = LMNH;$$

d'onde

$$l = \frac{L}{\operatorname{sen} a} H;\; m = \frac{M}{\operatorname{sen} b} H;\; n = \frac{N}{\operatorname{sen} c} H \ldots\ldots\ldots (R)$$

relações, que equivalem ás seguintes, que são obvias

$$l = L \operatorname{sen}(L, MN);\; m = M \operatorname{sen}(M, LN);\; n = N \operatorname{sen}(N, LM).$$

26. As formulas (R) dão as tres alturas l, m, n de um parallelipipedo, quando se conheça a funcção H, e a aresta respectiva á altura pedida.

A recta l representa tambem a distancia perpendicular entre a aresta M, e qualquer das duas arestas parallelas a N, e situadas na face parallela a MN; analoga significação podem ter m, e n.

27. As equações (R) dão pois a solução do problema, em que se peça a distancia perpendicular (v. gr. l) de duas rectas, quando se dá uma distancia obliqua (L) d'essas rectas, e as reciprocas inclinações d'essa distancia, e das rectas dadas.

Reciprocamente, sendo conhecidas essas tres inclinações, a dicta distancia obliqua será dada pelo conhecimento da distancia perpendicular.

28. Exporemos agora os diversos valores que póde ter H expresso pelos angulos a, b, c, A, B, C.

Sendo

$$H = \text{sen } a \times \text{sen } (L, MN);$$

e como pela trigonometria espherica

$$\text{sen } (L, MN) = \text{sen } b \text{ sen } C,$$

será

$$H = \text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } C = \text{sen } b \text{ sen } c \text{ sen } A = \text{sen } c \text{ sen } a \text{ sen } B \ldots (S)$$

29. Das formulas precedentes passa-se facilmente para as seguintes, em que entram os tres angulos diedros, e um angulo plano:

$$H = \frac{\text{sen}^2 a \text{ sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen}^2 b \text{ sen } A \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen}^2 c \text{ sen } A \text{ sen } B}{\text{sen } C} \ldots (T)$$

30. Como é

$$\cos c = \text{sen } a \text{ sen } b \cos C + \cos a \cos b,$$

a primeira das relações (S), e semelhantemente as outras, darão as seguintes, em que entram os tres angulos planos, e um angulo diedro

$$H = tg\, C (\cos c - \cos a \cos b) = tg\, A (\cos a - \cos b \cos c) = tg\, B (\cos b - \cos a \cos c) \ldots (U)$$

31. Se representarmos por s a semisomma dos angulos a, b, c, será pela trigonometria espherica

$$\text{sen } C = \frac{2\sqrt{\text{sen } s \text{ sen } (s-a) \text{ sen } (s-b) \text{ sen } (s-c)}}{\text{sen } a \text{ sen } b};$$

e por conseguinte, pelas relações (S),

$$H = 2\sqrt{\text{sen}\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c)} \ldots\ldots\ldots (V)$$

32. Como tambem se designarmos por S a semisomma dos tres angulos A, B, C, é

$$\text{sen}\, c = \frac{2\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\text{sen}\, A\ \text{sen}\, B} \ldots\ldots (V')$$

e

$$\text{sen}\, b = \frac{2\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\text{sen}\, C\ \text{sen}\, A};$$

deduziremos de (S)

$$H = \frac{-4\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\text{sen}\, A\ \text{sen}\, B\ \text{sen}\, C} \ldots\ldots\ldots (X)$$

33. Sendo

$$\text{sen}\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c) = \tfrac{1}{4}(\cos a - \cos(b+c))(\cos(b-c) - \cos a)$$

$$= \tfrac{1}{4}(\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 c + 2\cos a \cos b \cos c - 2) \ldots\ldots\ldots\ldots (X')$$

esta relação muda (V) em

$$H = \sqrt{\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 c + 2\cos a \cos b \cos c - 2}$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c} \ldots\ldots (Y)$$

34. Como applicando a formula (X') ao triangulo supplementario d'aquelle, que é determinado pelos lados a, b, c, achamos

$$-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C) = \tfrac{1}{4}(\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - 2\cos^2 A \cos B \cos C - 2) \ldots\ldots (Y')$$

(X) transforma-se em

$$H = \frac{\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - 2\cos A \cos B \cos C - 2}{\text{sen}\, A\ \text{sen}\, B\ \text{sen}\, C} = \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C}{\text{sen}\, A\ \text{sen}\, B\ \text{sen}\, C} \ldots (Z)$$

35. De (Y), e (Z) conclue-se para qualquer triangulo espherico a relação

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 a+\operatorname{sen}^2 b+\operatorname{sen}^2 c+2\cos a\cos b\cos c-2}=\frac{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2}{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}\;..(AA)$$

36. Sendo em virtude de (V'), e de (Y')

$$\operatorname{sen} c=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2};}{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}$$

esta equação mudará (AA) na notavel relação

$$\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 a+\operatorname{sen}^2 b+\operatorname{sen}^2 c+2\cos a\cos b\cos c-2}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2}}=\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}=\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}\;.\,.\,.\,.\,(BB)$$

37. Se continuando H a representar o volume do parallelipipedo correspondente ao triangulo espherico a, b, c, exprimir H_1 o volume do parallelipipedo correspondente ao triangulo supplementario d'aquelle, teremos

$$H_1=\sqrt{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2};$$

e por conseguinte (BB) equivale ao seguinte theorema

$$H : H_1 :: \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} A :: \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} c : \operatorname{sen} C;$$

isto é, a relação, n'um triangulo espherico, do seno de qualquer lado para o seno do angulo opposto equivale á relação dos volumes dos parallelipipedos determinados pelo triangulo dado, e pelo seu supplementario.

38. O theorema precedente deduz-se tambem facilmente de (S), pois que será

$$H_1=\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} c;$$

e por conseguinte

$$\frac{H}{H_1}=\frac{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} c}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}.$$

39. Poderiamos chegar a estabelecer a relação (L) independentemente do emprego das formulas (A).

Com effeito imaginemos, em primeiro logar, dois systemas de eixos $OXYZ$, $O\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$, em que OX, OY, $O\dot{X}$, $O\dot{Y}$ se acham no mesmo plano, e em que $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ representam respectivamente a unidade tomada sobre a direcção de cada um dos eixos do segundo systema. Sendo $\dot{H}$ o parallelipipedo correspondente a $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, teremos, sendo p a perpendicular baixada do extremo de $\dot{c}$ sobre XY,

$$\dot{H} = \text{parallelogrammo } \dot{a}\dot{b} \times p = \text{sen } XY\, (\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{b}_x \dot{a}_y)\, p;$$

ora

$$p = \dot{c}_z \text{ sen } (Z, XY),$$

logo

$$\dot{H} = \text{sen } XY \text{ sen } (Z, XY)\, \dot{c}_z\, (\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{b}_x \dot{a}_y),$$

d'onde

$$\frac{\dot{H}}{H} = \dot{a}_x \dot{b}_y \dot{c}_z - \dot{a}_y \dot{b}_x \dot{c}_z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (CC)$$

que é o theorema (L) no caso actual, em que $\dot{b}_z = \dot{a}_z = o$.

40. Passemos ao caso geral, em que o systema de eixos $O\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$ tomou uma posição qualquer $OX'Y'Z'$ em relação a $OXYZ$.

Das equações (M)

$$x = a'_x x' + b'_x y' + c'_x z';$$

$$y = a'_y x' + b'_y y' + c'_y z';$$

$$z = a'_z x' + b'_z y' + c'_z z';$$

conclue-se

$$z' = \frac{z(a'_x b'_y - a'_y b'_x) + y(a'_z b'_x - a'_x b'_z) + x(a'_y b'_z - a'_z b'_y)}{c'_z(a'_x b'_y - a'_y b'_x) + c'_y(a'_z b'_x - a'_x b'_z) + c'_x(a'_y b'_z - a'_z b'_y)} \ldots (DD)$$

Tirando pelo extremo de c' um plano parallelo a $X'Y'$, e que encontre o eixo OZ a uma distancia r da origem, será para o extremo d'essa distancia

$$x = y = o; \quad z = r; \quad z' = c' = 1,$$

e por conseguinte (DD) dará

$$r(a'_x b'_y - a'_y b'_x) = a'_x b'_y c'_z - a'_y b'_x c'_z + \text{etc} = D \ldots\ldots \quad (EE)$$

Esta equação nos dará o nosso theorema geral, mediante as seguintes considerações.

Seja S' a area do parallelogrammo determinado pelos lados a', b'; P a sua projecção orthogonal sobre um plano perpendicular a OZ; S'_{xy} o vestigio que fazem no plano XY as linhas que dão a projecção P.

Será

$$S' = \text{parallelogrammo } (\dot{a}, \dot{b}) = \text{sen } XY\,(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{a}_y \dot{b}_x);$$

$$S'_{xy} = \text{sen } XY\,(a'_x b'_y - a'_y b'_x);$$

mas sendo N, e N' as normaes aos planos XY, $X'Y'$, é

$$S' \cos N'Z = P = S'_{xy} \cos NZ,$$

d'onde

$$\frac{S'_{xy}}{\cos N'Z} = \frac{S'}{\cos NZ},$$

ou

$$\frac{\text{sen } XY\,(a'_x b'_y - a'_y b'_x)}{\cos N'Z} = \frac{\text{sen } XY\,(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{a}_y \dot{b}_x)}{\cos NZ};$$

Ora como a perpendicular baixada do extremo c' sobre o plano $X'Y'$ é egual á perpendicular p baixada do extremo de $\dot{c}$ sobre o plano XY, teremos

$$\frac{p}{\cos N'Z} = r; \quad \frac{p}{\cos NZ} = \dot{c}_z,$$

equações, que mudam a precedente em

$$r(a'_x b'_y - a'_y b'_x) = \dot{c}_z(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{a}_y \dot{b}_x),$$

a qual em vista de (CC), e (EE) dará finalmente a these geral, que se pretendia demonstrar

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{H'}{H} = D.$$

41. Estabelecido o precedente theorema, é extremamente facil concluir das equações (M) as nossas formulas (A).

Com effeito d'essas equações deduz-se

$$x'=\frac{b'_y c'_z - c'_y b'_z}{D}x+\frac{b'_z c'_x - c'_z b'_x}{D}y+\frac{b'_x c'_y - c'_x b'_y}{D}z \dots \quad (FF)$$

mas sendo N' a normal ao plano $Y'Z'$ é

$$x' \cos N'X' = x \cos N'X + y \cos N'Y + z \cos N'Z;$$

e se OX' coincidir com N',

$$x' = x \cos N'X + y \cos N'Y + z \cos N'Z,$$

equação, que comparada com (FF) dá

$$\cos N'X = \frac{b'_y c'_z - c'_y b'_z}{D};$$

$$\cos N'Y = \frac{b'_z c'_x - c'_z b'_x}{D};$$

$$\cos N'Z = \frac{b'_x c'_y - c'_x b'_y}{D};$$

formulas, que coincidem com (A), se advertirmos que

$$D = \frac{H'}{H} = \frac{\operatorname{sen} b'c'}{H}.$$