MEMORIAS
DE
MATHEMATICA
E PHISICA
DA
ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS
DE LISBOA.

Niſi utile eſt quod facimus, ſtulta eſt gloria.

TOMO II.

LISBOA
NA TYPOGRAFIA DA ACADEMIA,
1799.
Com licença de S. ALTEZA REAL.

REFLEXÕES

Sobre certas sommações successivas dos termos das Series arithmeticas, applicadas ás soluções de diversas questões algebricas.

POR

JOSÉ MARIA DANTAS PEREIRA.

Nec ulli nato post mile sæcula præcludetur occasio aliquid adhuc adjiciendi.

Seneca.

Lida em 8 de Jan. de 1794.

NA foluçaõ de varios Problemas da analyfe indeterminada, fomos muitas vezes conduzidos a exprefsões da forma $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+$ &c. da qual fe requerem as differentes foluções em numeros, ou fimplesmente inteiros, ou inteiros e pofitivos, na hypothefe de fer tambem x hum numero inteiro e pofitivo: he clariffimo o grande incommodo, que deve caufar a fatisfacçaõ do que fe requer, quando efta depende de calcular os numeros a que a dita fórmula fe reduz nas hypothefes fucceffivas de $x=1, =2, =3$, &c.; e que efte incommodo augmentará tanto mais quanto maior for o expoente m, e mais compofto o valor de x: por efta razaõ fempre nos dirigimos primeiro a conhecer a lei das feries formadas pelas differentes foluções pedidas, a qual, depois de conhecida, nos offerece meios de as continuar com muito menos trabalho: até agora confiftia de ordinario a maneira da dita indagaçaõ (ao menos a que me confta) em achar fuc-

fucceffivamente as differenças primeiras, fegundas, terceiras, e affim por diante até ás differenças do gráo m das primeiras $m+1$ foluções da fórmula propofta, precedendo o cuidado de determinar os valores correfpondentes de x, taes que formem huma progreffaõ arithmetica, e ifto na certeza de que as ditas differenças da ordem m devem fahir conftantes; pelo que retrogradando calculariamos todas as outras foluções pertendidas por meio de fimples fommas: efte methodo carece de fe calcularem primeiro $m+1$ foluções, para fe conhecer a fua lei, e poder depois achar facilmente as foluções reftantes, e affim lévanos por hum caminho indirecto ao fim que procuramos; pois he mais proprio conhecer a lei á vifta da fórmula, e com efta ir calcular depois as mefmas $m+1$ foluções primeiras: tal foi o motivo que me conduzio á compofiçaõ da prefente Memoria, onde tudo he confequencia da foluçaõ do feguinte

Problema fundamental.

Calcular por meio de fimples sommas de progressões arithmeticas as quantidades, a que se reduz a fórmula $\mathrm{a}x^{m}+\mathrm{b}x^{m-1}+\mathrm{c}x^{m-2}+$ &c. *nas hypotheses succcssivas de* $x=1, =2, =3$, &c.; *sendo* a, b, c, &c. *ou cifra, ou quantidades reaes; positivas, ou negativas; inteiras, ou fraccionarias.*

Soluçaõ.

Reprefente p o primeiro termo, r a razaõ, e x o numero de termos de qualquer progreffaõ arithmetica; fuppondo que T, e $\int$ fejaõ refpectivamente os termos geral, e fommatorio da mefma progreffaõ ferá $T=p+r(x-1)$, e $\int=\frac{r(x-1)x}{2}+px=r\left(\frac{x-1}{1}+\frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right)+px$: fe a cada termo $\int$ ajuntarmos qualquer quantidade h, re-

 ful-

ſultará huma nova ſerie onde teremos o termo geral . .
$T' = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right) + px + b$; e chamando $ſ'$ o termo ſommatorio deſta nova ſerie ſerá

$$ſ' = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\right) + p\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2}\right)$$

$+ bx$: conſiderando agora $ſ' + i$ como termo geral de outra ſerie, e $ſ''$ como ſeu termo ſommatorio, ſerá

$$ſ'' = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} + \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4}\right)$$

$$+ p\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}\right) + b\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2}\right) + ix\text{ , e}$$

aſſim por diante; donde ſe conclue, que ſe, ſommados os termos de huma progreſſaõ arithmetica dos quaes o primeiro for p e a razaõ r, augmentarmos a cada termo da ſomma a quantidade b; e feita huma nova ſomma, ſe ajunta a cada termo della a quantidade i; e ſommando depois outra vez, ſe augmenta a cada termo deſta outra ſomma a quantidade k, e aſſim por diante até completar hum certo numero $m-1$ de ſommas, cada termo da ſerie reſultante ſerá repreſentado em geral pela fórmula ſeguinte, (A), $r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} + \right.$

$$\left.\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4} + \ldots \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)\ldots(x+m-3)}{1.2.3.4\ \ldots\ m}\right) +$$

$$p\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-3)}{1.2.\ \ldots\ m-1}\right) +$$

$$b\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-4)}{1.2.\ \ldots\ m-2}\right) +$$

$$i\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-5)}{1.2.\ \ldots\ m-3}\right) +$$

$$k\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ \ldots\ (x+m-6)}{1.2.\ \ldots\ m-4}\right) +$$

&c.

He

He evidente que esta fórmula desenvolvida, e ordenada a respeito de x dará sempre huma equaçaõ do gráo m, onde os coefficientes de x seraõ funcções das indeterminadas r, p, h, i &c., e que destas indeterminadas conterá a equaçaõ desenvolvida tantas, quantas forem as unidades de m, as quaes por consequencia seraõ sempre determinaveis pela igualaçaõ successiva dos coefficientes de huma mesma potencia de x nas duas fórmulas a proposta, e a desenvolvida; logo segue-se, que a expressaõ $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} +$ &c. $+ nx$ he sempre resoluvel pela dita addicçaõ successiva das series arithmeticas; que para assim a resolver saõ precisas $m - 1$ de sommas; e que para determinar logo a primeira progressaõ arithmetica, a que chamaremos *base*, e as outras quantidades h, i, k, &c. que successivamente se devem hir ajuntando, deveremos desenvolver da fórmula superior a parte que fôr correspondente, conforme as unidades de que m constar, igualando depois entre si os coefficientes de huma mesma potencia da variavel, o que dará tantas equações como indeterminadas, das quaes será sempre facillimo tirar o valor destas indeterminadas. Q. E. D. et F.

Para maior clareza ajuntarei o seguinte

Exemplo.

Supponhamos que se pedem todas as soluções da fórmula $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$ nas hypotheses successivas de ser $x = 1, = 2, = 3$ &c.

A parte da expressaõ geral sommatoria, que neste caso deverá desenvolver-se, he $r\left(x - 1 + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1) + \frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\right) + p\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x + \right.$

$\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)+\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)\Big)+$$
$$h\Big(x+\frac{1}{2}(x-1)x+\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\Big)+i\Big(x+\frac{1}{2}(x-1)x\Big)+kx;$$

a qual reduzida, e ordenada a respeito de x, dá a seguinte expressaõ

$$x^5\frac{r}{120}+x^4\Big(\frac{5r}{120}+\frac{p}{24}\Big)+x^3\Big(\frac{5r}{120}+\frac{6p}{24}+\frac{h}{6}\Big)+x^2\Big(\frac{-5r}{120}+\frac{11p}{24}+$$
$$\frac{3h}{6}+\frac{i}{2}\Big)+x\Big(\frac{-6r}{120}+\frac{6p}{24}+\frac{2h}{6}+\frac{i}{2}+k\Big);$$

igualando termo a termo com a fórmula proposta temos,

$$r=120;\ p=-144;\ h=180;\ i=-36;\ k=-1;$$

com estes dados passaremos a formar as series seguintes, e a ultima dellas mostrará o que se quer

-144,	-24,	96,	216,	336,	&c.	
-144,	-168,	-72,	144,	480,	&c.,	primeira somma
36,	12,	108,	324,	660,	&c.	
36,	48,	156,	480,	1140,	&c.,	segunda somma
0,	12,	120,	444,	1104,	&c.	
0,	12,	132,	576,	1680,	&c.,	terceira somma
-1,	11,	131,	575,	1679,	&c.	
-1,	10,	141,	716,	2395,	&c.,	quarta somma,

que resolve a questaõ: com effeito se, ex. gr., supposmos $x=4$, vêse que a fórmula se reduz a $1024-256-64+16-4=716=$ ao quarto termo da ultima serie.

Nota.

Se a fórmula dada fosse $ax^m+bx^{m-1}+\ldots H$, achada como assima a serie, que resolvesse $ax^m+bx^{m-1}+\ldots nx$, ajuntando a cada hum dos seus termos a quantidade H, teriamos a serie competente á fórmula proposta.

Por exemplo, se em lugar da expressaõ que fica men-

mencionada se desse esta $x^5-x^4-x^3+x^2-x+8$, augmentando 8 a cada termo da ultima serie superior, teriamos esta

$$7, 18, 149, 724, 2403, \&c.$$

que satisfaz a questaõ.

Está pois resolvido plenamente o problema proposto; por tanto vamos tratar de algumas das suas applicaçoẽs.

O que fica dito antes da soluçaõ precedente assás manifesta o grande uso della na analyse indeterminada, para conhecer as leis das series, que resolvem muitos dos seus problemas, e por isso he inutil a demora, que podia fazer sobre este assumpto; porém algumas vezes faz-se preciso usar antes de certas preparaçoẽs a fim de evitar quebrados, as quaes saõ semelhantes ás de que necessita o problema immediato, que por esta causa resolveremos.

Exposiçaõ.

Achar tres numeros inteiros taes, que, se do triplo do quadrado do primeiro se tirar o segundo, o resto seja igual a oito vezes o terceiro; e que, se do cubo do primeiro se tirar o seu dobro, o resto seja igual ao segundo.

Soluçaõ.

Faça-se o primeiro $=x$, o segundo $=y$, o terceiro $=z$, e teremos $3x^2-y=8z$, $x^3-2x=y$, donde se tira $z=\frac{x(-x^2+3x+2)}{8}$: ora x, y, z devem ser inteiros, mas sendo x inteiro, y tambem o he, pois que temos $y=x^3-2x$; logo resta vêr quaes numeros inteiros pode ser x, para que z, ou $\frac{x(-x^2+3x+2)}{8}$, seja numero inteiro: ora x, relativamente ao divisor 8, ha-de ser hum numero comprehendido em alguma das fórmas seguintes,

$8n$; $8n+1$; $8n+2$; $8n+3$; $8n+4$; $8n+5$; $8n+6$; $8n+7$;

ſendo x da fórma $8n$, z ſerá evidentemente hum numero inteiro, pois que entaõ he $z = n(24n - 64n^2 + 2)$; ſe x for da fórma $8n + 1$, ſerá $z = \frac{(8n+1)(-64n^2+8n+4)}{8}$, e logo naõ ſerá inteiro; mas ſe x fôr da fórma $8n + 2$, z ſerá igual a $(4n+1)(-16n^2-2n+1)$, e por conſequencia inteiro: diſcorrendo por diante da meſma maneira veriamos, que, para z ſer numero inteiro, he neceſſario que x ſeja hum numero inteiro pertencente a alguma das fórmas, $8n$, $8n+2$, $8n+4$, $8n+5$, $8n+6$; expreſsões que, ſubſtituidas por x no valôr de z, daõ 1.° $z = 24n^2 - 64n^3 + 2n$, 2.° $z = -64n^3 - 24n^2 + 2n + 1$, 3.° $z = -64n^3 - 72n^2 - 22n - 1$, 4.° $z = -64n^3 - 96n^2 - 43n - 5$, 5.° $z = -64n^3 - 120n^2 - 70n - 12$: cada hum deſtes ultimos valores de z ſerá o que ſe deva calcular pelo noſſo methodo, ſuppondo ſucceſſivamente

$n = 0, = 1, = 2, = 3, = \&c.$, o que dará
nos primeiros $x = 0, = 8, = 16, = 24, = \&c.$
nos ſegundos $x = 2, = 10, = 18, = 26, = \&c.$
nos terceiros $x = 4, = 12, = 20, = 28, = \&c.$
nos quartos $x = 5, = 13, = 21, = 29, = \&c.$, e ultimamente
nos quintos $x = 6, = 14, = 22, = 30, = \&c.$
calculados x e z, y fica facil.

Notas.

1.ª Se, além de ſer z igual á expreſſaõ fraccionaria $\frac{1}{8}(3x^2 - x^3 + 2x)$, tambem y foſſe igual a outra expreſſaõ fraccionaria, fariamos primeiro que o valor de y contiveſſe ſómente x de incognito, depois indagariamos, que fórmas devia ter x relativamente ao diviſor do valor de y, da meſma ſorte que operamos para z; em fim as fórmas que ſe achaſſem para y multiplicadas duas a duas com as que tiveſſemos determinado para z, dariaõ as novas fórmas, que x devia ter, para ſatisfazer ambas as condi-
çóes

çóes ao mesmo tempo, tendo o cuidado de fazer entrar neste numero as fórmas primeiras, que se achassem communas aos dous valores: assim teriamos as expressões, que deveriaõ ser substituidas nos valores de x, e z, para depois os calcular pelo nosso methodo.

2.ª A nota precedente faz ao mesmo tempo conhecer o que se deve praticar quando as expressões fraccionarias forem mais de duas, por isso naõ continuaremos com estes casos.

3.ª Se no enunciado do problema dissessem que z, y, e x deviaõ ser inteiros, e positivos; entaõ, sobre as reflexões já feitas, deveriamos ver tambem, que fosse $x^2 < 3x + 2$, e $x^3 > 2x$, o que dá $x < 3,6$; e $x > 1,4$; ora estas condições combinadas com ser x de alguma das fórmas $8n$, $8n + 2$, &c., fazem ver, que o problema tem huma soluçaõ só em numeros inteiros, e positivos, que vem a ser $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$.

4.ª Todas as preparações, e considerações feitas na soluçaõ do problema, e nas precedentes notas, saõ precisas a fim de naõ calcular hum só numero, que deixe de servir, pois aliás pode-se hir directamente achar todas as soluções da fórmula $\frac{-x^3+3x^2+2x}{8}$ assim como se fez para ter as de $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$; para cujo fim desenvolvendo a parte competente da expressaõ geral sommatoria, e continuando as mais operações, achariamos $r = -\frac{6}{8}$; $p = \frac{6}{8}$; $b = -\frac{2}{8}$; com o que se formariaõ as seguintes series:

$$\div + \frac{6}{8},\ 0 \cdot -\frac{6}{8} : -\frac{12}{8} \cdot -\frac{18}{8} \cdot \text{\&c.}$$

$$\frac{6}{8},\ \frac{6}{8},\ 0,\ -\frac{12}{8},\ -\frac{30}{8},\ \text{\&c.}$$

$$\frac{4}{8},\ \frac{4}{8},\ -\frac{2}{8},\ -\frac{14}{8},\ -\frac{32}{8},\ \text{\&c.}$$

$$\frac{4}{8},\ 1,\ \frac{6}{8},\ -1,\ -5,\ \text{\&c.}$$

a ultima claramente moſtra, que ſó quando $x = 2$, ſahe $z = 1$, numero inteiro e poſitivo: ſe ſe continuaſſe moſtraria tambem, que z era inteiro, quando x foſſe hum dos numeros, 8, 16, 24 &c., 2, 10, 18 &c., 4, 12, 20 &c., 5, 13, 21 &c., 6, 14, 22 &c., que ſaõ juſtamente os numeros das fórmas aſſima expoſtas.

5.ª Naõ devo ommittir a ſeguinte vantagem do preſente methodo, vem a ſer poder-ſe calcular com facilidade huma ſoluçaõ independentemente das outras todas, e poder-ſe depois achar eſtas outras, já retrogradando, já continuando a reſpeito della. Supponhamos que ſe tenha reſolvido hum problema indeterminado, o qual nos conduza á ſeguinte equaçaõ $y = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$, e que pertendamos partir da terceira ſoluçaõ; tendo achado como aſſima os valores de r, p, h, i &c., ſubſtituindo-os na parte deſenvolvida da expreſſaõ geral ſommatoria, teremos que eſta ſe reduzirá a

$$120\left(x - 1 + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1) + \frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\right) - 144\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x + \frac{1}{6}(x-1)x(x+1) + \frac{1}{24}(x-1)(x)(x+1)(x+2)\right) + 180\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x + \frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\right) - 36\left(x + \frac{1}{2}(x-1)x\right) - x;$$

onde fazendo $x = 3$; virá

$120 \times 6 - 144 \times 15 + 180 \times 10 - 36 \times 6 - 3 = 141$ ſoluçaõ procurada.

Querendo agora por meio deſta achar todas as outras, hiriamos calcular os terceiros termos ſucceſſivos da baſe, e das outras ſeries; para o que notariamos, que a fórmula precedente em conſequencia da ſubſtituiçaõ reduz-ſe a

$$120(2+1+1+1+1) - 144(3+3+4+5) + 180(3+3+4) - 36(3+3) - 1 \cdot 3$$

e logo teremos

$120 . 2 - 144 = 96 =$ ao terceiro termo da baſe.

$120(2+1) - 144.3 = 96 + 120 - 144.2 = -72 =$ 3.º termo da 2.ª ſerie.

$120(2+1) - 144.3 + 180 = -72 + 180 = 108 =$ 3.º termo da 3.ª ſerie.

$120(2+1+1) - 144(3+3) + 180.3 = 108 + 120 - 3.144 + 2.180 = 156$ $=$ 3.º termo da 4.ª ſerie.

$120(2+1+1) - 144(3+3) + 180.3 - 36 = 156 - 36 = 120 =$ 3.º termo da 5.ª ſerie.

$120(2+1+1+1) - 144(3+3+4) + 180(3+3) - 36.3 = 132 =$ 3.º termo da 6.ª ſerie.

$120(2+1+1+1) - 144(3+3+4) + 180(3+3) - 36.3 - 1 = 131 =$ 3.º termo da 7.ª ſerie.

ordenados agora eſtes terceiros termos verticalmente, viſto ſerem já conhecidas as quantidades r, p, h, i, k, e conhecer-ſe tambem o como ſe deve uſar dellas, fica facil continuar em qualquer ſentido a baſe, e cada huma das outras ſeries até á ultima. Q. E. F.

A razaõ do modo empregado em achar os terceiros termos todos ficará evidente, a-penas ſe pondére, que a expreſſaõ geral ſommatoria, logo que $r, p,$, &c. ſaõ determinados, deve repreſentar as differentes ſommas da progreſſaõ arithmetica, a quem r, e p competem, com as mais onde entraõ as quantidades h, i, &c., pela ſimples ſuppoſiçaõ de $m = 2, = 3, = 4, = 5$, &c.

Paſſemos agora a moſtrar como a ſoluçaõ do problema fundamental pode ſer applicada á reſoluçaõ das equações numericas de todos os gráos.

As raizes das equações numericas podem-ſe dividir em reaes, e imaginarias; as primeiras ſubdividem-ſe em racionaes, e irracionaes, poſitivas, ou negativas; e ultimamente, as raizes racionaes podem ſer ou numeros inteiros, ou fraccionarios: ora reſolver huma equaçaõ tal como por exemplo $ax^m + bx^{m-1} + \ldots h = 0$, he achar para x valores que façaõ $ax^m + bx^{m-1} + \ldots\ldots = -h$; pelo noſſo methodo podem calcular-se com facilidade os valores de $ax^m + bx^{m-1} +$ &c. , quando se suppoem x successivamente $= 1, 2, 3,$ &c. , logo

1.° Se as raizes da equaçaõ proposta forem numeros inteiros, e positivos, na serie dos ditos valores deve forçosamente achar-se $-h$, m de vezes.

2.° Se as mesmas raizes fôrem numeros positivos , e fraccionarios, deverá apparecer naõ $-h$, mas sim numeros entre os quaes $-h$ se contenha, e entaõ ficará conhecida a parte inteira da raiz ; em quanto á fracçaõ , que a deve acompanhar, abaixo diremos hum modo de a calcular, o qual servirá tambem para a approximaçaõ das raizes irracionaes.

3.° Sendo porém as raizes da equaçaõ proposta, numeros negativos, inteiros, ou fraccionarios, racionaes, ou irracionaes, a serie mencionada nem conterá $-h$, nem mostrará limites que o contenhaõ ; convertidas porém na mesma equaçaõ as raizes positivas em negativas, e reciprocamente, teremos entaõ huma nova equaçaõ, cujas raizes seraõ numeros positivos , que determinaremos pelo modo assima dito.

4.° Se as raizes fôrem reaes, mas humas negativas, e outras positivas , calcularemos estas primeiro , e mudando depois os signaes ás potencias impares de x , passaremos a calcular as raizes positivas da nova equaçaõ, que seraõ as negativas da primeira.

5.° Quando a equaçaõ proposta contiver raizes iguaes, inteiras, ou fraccionarias , he claro que nas series sim se achará $-h$, ou limites, que o contenhaõ , mas naõ tantas vezes quantas saõ as unidades de m; por quanto, suppondo c huma das raizes iguaes , as series deveráõ mostrar, que $ax^m + bx^{m-1}+$&c. se reduz a $-h$ quando $x=c$, mas de nenhuma sorte podem fazer conhecer quantos factores $x-c$ se involvem na dita equaçaõ, de maneira que, suppondo haver n de raizes c , as series só mostraráõ $m-n+1$ de raizes; e se a equaçaõ contivesse n de rai-

zes

zes c, q de raizes d, r de raizes e, &c., as ſeries ſó nos fariaõ conhecer $m - n - q - r + 3$, &c. de raizes, o que he evidente; eſta falta tem o prompto remedio de ſe dividir a equaçaõ propoſta pelos factores correſpondentes ás raizes achadas, pois aſſim obteremos huma equaçaõ de menor gráo, que reſolvida como a precedente, nos dará o meſmo numero, e grandeza de raizes, ſe eſtas eraõ iguaes duas a duas; ou menos ſe entre ellas houverem algumas iguaes tres a tres, quatro a quatro, &c.: no primeiro caſo teremos achado todas as raizes pedidas, no ſegundo dividiremos a nova equaçaõ pelos factores ſimples, que ella nos der, e teremos outra, que tambem reſolveremos, continuando aſſim até achar as m raizes.

6.° Quando, formadas as ſeries para as raizes poſitivas, e negativas, naõ encontrarmos $-b$, nem limites que o comprehendaõ; ou quando o naõ encontrarmos tantas vezes quantas forem as unidades de m, e dividindo depois a equaçaõ propoſta pelos factores correſpondentes ás raizes achadas, a nova equaçaõ for tal que o ſeu ultimo termo, ou naõ ſe contenha nas ſeries que ſe fizerem para a reſolver, ou ſe contenha menos vezes do que ſaõ nella as unidades do maior expoente da incognita; e aſſim ſucceſſivamente, de maneira que por fim cheguemos a huma equaçaõ, cujo ultimo termo naõ entre nas ſeries; he manifeſto que ſe deve concluir, no primeiro caſo, que todas as raizes da equaçaõ propoſta ſaõ imaginarias; e no ſegundo, que ſaõ imaginarias as que reſtaõ a conhecer; porque viſto naõ entrarem nas ſeries naõ podem ſer numero algum, racional, ou irracional, poſitivo, ou negativo, e por conſequencia naõ podem ſer numero algum real.

Notas.

1.ª He neceſſario advertir, que de tres modos póde $-b$ ter limites que o comprehendaõ; ou ſendo hum dos termos das ſeries menor que $-b$, e o ſeu immediato maior

maior; ou ſendo ambos menores, ou maiores que $-b$; da meſma ſorte que ab póde exiſtir entre mn, e pq, ou ſendo $ab > mn$, e $< pq$, ou ſendo $a'b' > m'n'$, e $> p'q'$, ou ſendo $a''b'' < m''n''$, e $< p''q''$; por iſſo deve haver cuidado em decidir ſe $-b$ tem ou naõ limites que o comprehendaõ, e por tanto vamos a notar o como ſe deve proceder em ſemelhantes caſos: conhecer que $-b$ tem limites, quando he como $ab > mn$, e $< pq$ he couſa clariſſima; $-b$ terá lemites, ſendo maior que os termos da ſerie, quando fôr como $a'b' > m'n'$, e $> p'q'$, iſto he, quando a ſerie decreſcer de cada hum dos termos immediatamente menores do que $-b$ para os lados; em fim $-b$ terá limites ſendo menor do que dois termos conſecutivos da ſerie, quando deſtes para os lados a ſerie fôr augmentando.

2.ª A nota 5.ª do exemplo precedente faz obſervar, que eſte methodo tem a grande vantagem de principiar a ſerie dos valores no termo que ſe quizer, e por eſte motivo pode poupar muito trabalho principiando o calculo em hum termo, que pouco mais ou menos repreſente x na equaçaõ propoſta: para iſto poderemos ſervir-nos com toda a vantagem, ou das idéas relativas aos termos dominantes das equações, expoſtas por M. de Lagny nas Memorias de Pariz para o anno de 1706; ou das de M. de la Grange eſcritas nas Memorias de Berlin para o anno de 1767: onde, e nas de 1768, ſe acharáõ tambem couzas aſſás intereſſantes ſobre a reſoluçaõ geral das equações numericas de todos os gráos.

3.ª No uſo do methodo ſe conhecerá tambem ſer elle tal, que a meſma formaçaõ da ultima ſerie vai moſtrande ſe ha, ou naõ mais que eſperar della, circunſtancia que tambem poupa o trabalho inutil, a que muitas vezes obrigaõ aquelles methodos, que de longe naõ moſtraõ os limites onde ſe deve parar.

4.ª Note-ſe mais que a ſubſtituiçaõ Newtoniana de introduzir por x os numeros 1, 2, 3, &c. $-1, -2, -3$, &c. até

até se alcançar hum resultado positivo, e outro negativo, tem o defeito notado por M. Bezout, de naõ satisfazer quando as raizes da equaçaõ saõ iguaes, defeito que se naõ encontra em o presente; pois que as raizes da equaçaõ, ou devem ser imaginarias, ou infallivelmente saõ dadas por elle; de sorte que, naõ achar por este methodo algumas raizes, he signal certissimo de ellas serem imaginarias, e que por consequencia deve a equaçaõ, que as contém, ser decomposta do modo competente.

5.ª Só póde objectar-se ao meu methodo trabalho inutil, quando as raizes fôrem todas imaginarias; mas he elle tal, que neste caso formadas as series, logo desde os primeiros termos se conhece serem as raizes imaginarias, como deve ser, e como se pode vêr resolvendo, por exemplo, a equaçaõ $x^4 + 6x^3 + 26x^2 + 46x + 65 = 0$, cujas raizes saõ todas imaginarias; para o que deve primeiro notar-se, que, vista a disposiçaõ dos signaes, se as raizes fossem reaes, naõ podiaõ ser senaõ negativas.

Resta agora dar o modo de calcular as raizes fraccionarias, e approximar as irracionaes; o que vou executar na soluçaõ do seguinte problema, que servirá de exemplo aos mais do mesmo genero.

Problema.

Achar as raizes da equaçaõ $x^3 - x^2 - 41x - 100 = 0$.

Soluçaõ.

A equaçaõ proposta deve conter duas raizes positivas, e huma negativa; para determinar as primeiras formaremos as seguintes series:

$\div - 2. \quad 4. \quad 10. \quad 16. \quad 22. \quad 28$, &c.

$- 2, \quad 2, \quad 12, \quad 28, \quad 50, \quad 78$, &c.

$-41, -37, -27, -11, +11, +39$, &c.

$-41, -78, -105, -116, -105, -66$, &c.

a ultima bem patenteia, que as duas raizes positivas saõ fraccionarias, e que devem estar, a primeira entre 2, e 3, e a segunda entre 5, e 6; porque -100 cahe entre -78, e -105, e entre -105, e -66: tratêmos pois de hir approximar a raiz menor, e para isto supporemos que ella seja

$2 + 0,1.y$, ou $2 + 0,01.y$, ou $2 + 0,001.y$ &c.

conforme a quizermos approximadã até ás décimas, centessimas, millessimas, &c.; por agora faça-se $x = 2 + 0,1.y$, este valor de x substituido na equaçaõ proposta a transformará nesta $y^3 + 50y^2 - 3300y + 22000 = 0$, onde indagaremos o valor de y, assim como em a proposta se examinou o de x, o que nos dará $y > 7, < 8$, e logo a raiz até ás décimas será 2, 7. Querendo-a agora até ás centessimas, ou transformariamos a equaçaõ precedente nesta $y^3 + 500y^2 - 330000y + 22000000 = 0$, a qual resolvida satisfaria a nossa pertençaõ, advertindo, que para evitar trabalho deveriamos calcular do termo 70 por diante, visto sabermos já que as décimas saõ 7; ou fariamos $y = 7 + 0,1.z$, valor que substituido por y daria

$$z^3 + 710z^2 - 245300z + 1693000 = 0,$$

equaçaõ onde facilmente determinariamos as centessimas da raiz: e continuando assim chegariamos em fim ao pertendido gráo de approximaçaõ. Q. E. F.

Notas.

1.ª He manifesto, que desta maneira approximariamos a raiz até onde quizessemos, se ella fosse irracional, mas que a ser racional achariamos huma dizima, ou finita, ou periodica, que seria sempre facil converter em quebrado.

2.ª

2.ª A equaçaõ em y deve ter tres raizes, cada huma das quaes junta a 2 formará huma das raizes da proposta; e logo conhecidas aquellas, estaraõ conhecidas estas.

3.ª Quando muitas raizes fôrem iguaes em quanto, ás unidades; ás unidades, e décimas; ás unidades, décimas, e centessimas; &c. o seu primeiro aspecto (por assim dizer) será ou de imaginarias, ou de absolutamente iguaes; porém á medida que formos resolvendo as equações em y, em z, &c. iremos formando o verdadeiro conceito das raizes, e determinando o seu exacto valor.

4.ª Este methodo de approximar he certo, e naõ obstante parecer algum tanto longo, com tudo naõ o he quanto parece: todavia sempre satisfaz ao seu fim, que he mostrar o uso, que pode ter a soluçaõ do Problema fundamental na approximaçaõ das raizes das equações: dos methodos, que para isto mesmo tenho visto até agora, o mais breve foi exposto em 1774 á Real Academia das Sciencias de Pariz pelo Marquez de *Courtivron*, em huma elegante Memoria, no fim da qual mostra a identidade da sua ultima formula com a de *Euler*, que nesse tempo appareceu sem a respectiva demonstraçaõ; por isto, em quanto diz respeito ao presente assumpto, reporto-me absolutamente á dita Memoria, posto que ella necessite de algumas observações, as quaes deixo agora de fazer por naõ ser muito extenso.

Igual motivo me determina a omittir a applicaçaõ do meu methodo, aliás evidente, ás sommações successivas dos termos, e potencias dos termos das progressões arithmeticas; assim como tambem á determinaçaõ immediata das ballas contidas em pilhas de qualquer figura, contentando-nos com dar fim a esta Memoria mostrando, como o mesmo methodo nos conduz a determinar os coefficientes do binomio Newtoniano.

1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
1	3	6	10	15	21	28	36	&c.
1	4	10	20	35	56	84	120	&c.
1	5	15	35	70	126	210	360	&c.
1	6	21	56	126	252	462	822	&c.
1	7	28	84	210	462	924	1746	&c.

Se, ordenando a ſerie de unidades repreſentada pela figura ſuperior, formos ſommando eſtas ſucceſſivamente comſigo meſmas, e achando por conſequencia os diverſos numeros naturaes, e figurados; e ſe depois conſiderarmos os numeros, que ficaõ diſtribuidos diagonalmente, a ſaber,

1.º 1, 1
2.º 1, 2, 1
3.º 1, 3, 3, 1
4.º 1, 4, 6, 4, 1
5.º 1, 5, 10, 10, 5, 1
&c.

conheceremos facilmente, que elles repreſentaõ os coefficientes das potencias ſucceſſivas de qualquer binomio ſimples; vê-ſe pois, que as expreſsões geraes dos meſmos coefficientes podem ſer achadas como corollarios do noſſo Problema fundamental, baſtando para iſto fazer as reflexões ſeguintes:

1.ª Que a baſe tem o primeiro termo igual a 1, e a razaõ igual a 0.

2.ª Que as quantidades h, i, &c. ſaõ tambem iguaes a cifra.

3.ª

3.ª Que ſendo μ o expoente da potencia á qual o binomio propoſto deva ſer elevado, o primeiro coefficiente he ſempre o primeiro termo da ſomma μ, ou o termo $\mu+1$ da primeira ſerie, ou da baſe, o qual vem a ſer 1.

4.ª Que o ſegundo coefficiente, he o ſegundo termo da ſomma $\mu-1$, ou o termo μ da ſerie ſegunda, que forma a primeira ſomma da baſe.

5.ª Que o terceiro coefficiente, he o terceiro termo da ſomma $\mu-2$, ou o termo $\mu-1$ da ſerie terceira, ſomma ſegunda da baſe.

6.ª Que o quarto coefficiente, he ſempre o quarto termo da ſomma $\mu-3$, ou o termo $\mu-2$ da ſerie quarta, ſomma terceira da baſe; e aſſim por diante: donde ſe conclue, que em geral o σ coefficiente he igual ao termo $\mu-\sigma+2$ da ſomma $\sigma-1$ da baſe dita.

Das precedentes obſervações reſulta

1.° Que da ſerie achada na ſoluçaõ do Problema fundamental, a parte que deve ſatisfazer eſtas queſtões, he,

$$x+\frac{1}{2}(x-1)x+\ldots\ldots\frac{(x-1)x\ldots\ldots(x+m-3)}{2\ldots\ldots m-1}$$

2.° Que neſta parte deve fazer-ſe $m=\sigma$, e $x=\mu-\sigma+2$, o que a faz transformar em a ſeguinte $\mu-\sigma+2+\frac{1}{2}(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)+\frac{1}{6}(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)(\mu-\sigma+3)+\ldots$

$$\frac{(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)\ldots\ldots(\mu-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(\sigma-1)}.$$

Agora baſtará fazer ſucceſſivamente $\sigma=2, 3, 4$, &c. para obter as expreſsões geraes pertendidas, como ſe vê nos ſeguintes exemplos:

$$\sigma=2.$$

2.° Coefficiente $=\mu-2+2=\mu$

$$\sigma = 3.$$

3.° Coef. $= \mu - 1 + \frac{1}{2}(\mu - 2)(\mu - 1) = \mu . \frac{\mu - 1}{2}$

$$\sigma = 4.$$

4.° Coef. $= \mu - 2 + \frac{1}{2}(\mu - 3)(\mu - 2) + \frac{1}{6}(\mu - 3)(\mu - 2)(\mu - 1)$

$$= \mu . \frac{\mu - 1}{2} . \frac{\mu - 2}{3}.$$

&c.

Q. E. F. et D.

DES-