HISTORIA
E
MEMORIAS
DA
ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS
DE LISBOA.

Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.

TOMO X. PARTE II.

LISBOA

NA TYPOGRAFIA DA MESMA ACADEMIA.

1830.

Com Licença de S. MAGESTADE.

MEMORIA

Sobre a nomenclatura, ou lingoagem mathematica, menos bem tratada pelo habilissimo auctor do Ensaio de Psychologia impresso em Paris no anno 1826.

POR JOZE MARIA DANTAS PEREIRA.

ENTRE as citações numerosissimas, que se encontrão no Ensaio sobre a Psychologia dado á luz em Paris no anno 1826, existe a de Horacio:

cui lecta potenter erit res
nec facundia deseret hunc, nec lucidus ordo:

a qual contêm huma proposição pertencente á classe das que admittem inversa; pois não pode haver *facundia*, *nec lucidus ordo* em obra, cujo assumpto seja superior ás forças de quem o trata.

Conseguintemente, contemplando a ordem lucida, e não só a facundia mas tambem a vastissima erudição, que brilhão a cada passo no dito Ensaio, quão extraordinario talento, e quantos conhecimentos ainda mais extraordinarios, devemos respeitar com a maior complacencia no seu auctor, que demais a mais he portuguez, e portuguez muito distincto em mais de hum sentido!

Com tudo este mesmo conceito que formo de auctor tão benemerito he quem me precisa a procurar combatello, em quanto á sua opinião sobre a lingoagem ou nomenclatura mathematica: em relação á qual me parece que lhe re-

recahe o *quandoque bonus dormitat Homerus*, que oxalá podesse recahir-me semelhantemente.

Com effeito o respeitavel auctor diz na pag. 66, e nas seguintes: « os defeitos sem exemplo da nomenclatura » mathematica, tornão esta parte da que por antonomasia chamamos *Sciencia* muito inferior á que lhe corres» ponde em todas as outras sciencias, moraes e physicas: » pois nestas nunca se permitte usar de huma expressão » em dois sentidos differentes . . . e naquella huma expres» são chega a ter oito significações. »

« Perguntando-se a hum mathematico a significação » da expressão $+$, e da expressão $-$, responde: »

« 1.° Que $+a$ designa estar a quantidade a destinada » para ser accrescentada a outra quantidade b (por exemplo): » e que por isto aquella quantidade he chamada *positiva.* »

« 2.° Que $-a$ designa dever ser esta quantidade sub» trahida: e que por isto a denominão *negativa.* »

« 3.° Que $+a$ significa a soma de huma grandeza » positiva com outra menor negativa; $+a = +b - c$, » sendo $c < b$. »

« 4.° Que tendo supposto a negativo, a expressão » mais significa devermos continuar a considerallo como » tal negativo; isto he, que $b + (-a) = b - a$. »

« 5.° Que $+ = + \times +$. »

« 6.° Que $+ = - \times -$. »

« 7.° Que $+ = + : +$. »

« 8.° Que $+ = - : -$. »

« 9.° Que tratando-se de quantidades geometricas, as » precedidas pelo signal $-$ tem situação opposta ás pre» cedidas pelo signal $+$. »

« 10.° Que $-a$ designa a soma de huma quantidade » positiva com outra maior negativa; isto he, que $-a$ » $= b + (-c)$, sendo $c > b$. »

« 11.° Que tendo supposto $-a$ positivo, deveremos » dahi por diante considerar $+a$ como negativo; $-a =$ » $-(+a)$.

12.°

" 12.° Que $- = + \times -$. "

" 13.° Que $- = + : -$. "

" 14.° Que $- = - : +$. "

" Eisaqui pois os mathematicos dando nada menos de " oito definições para a expressão +, e sete para a expres- " são —. "

" Sei que em *todos* os elementos mathematicos se per- " tende *demonstrar* estas differentes *definições*; mas tambem " sei, e *todos* os mathematicos de alguma distincção reco- " nhecerão commigo, que *todas* estas pertendidas demon- " strações são paralogismos. "

" O mesmo auctor assevera que nas linguas vulga- " res . . . não ha expressão da qual não se tenha dado, " ou não possa dar-se huma boa definição. "

Por tanto como estou comprehendido entre aquelles que tem publicado elementos de arithmetica universal, procurarei mostrar-me isento dos suppostos, ainda que não provados paralogismos: e para este fim analysarei o que tenho relatado, expendendo ao mesmo tempo os meus respectivos raciocinios.

Primeiramente noto que a palavra definição me suscita idea diversa da que lhe corresponde no benemerito auctor do Ensaio; mormente quando affirma, que os mathematicos tem pertendido demonstrar definições; e dão nada menos de oito definições á expressão +.

Apesar da sua exposição relativa ás oito denominadas definições, ou estas concordão, ou discordão.

Se concordão, ou são identicas, ou são precisas consequencias reciprocas, e por isso reductiveis a huma unica, devendo preferir-se para definição a mais simples: como *ex. gr.* na circunferencia devemos preferir a definição *curva cujos pontos equidistão de hum existente no seu plano*, como mais simples, ou mais geral e promptamente comprehensivel do que seria, por exemplo, a definição *curva em cujo plano traçando duas rectas que se cortem dentro della, e produsindo-as até á mesma curva, as partes de* *huma formão extremos, e as da outra meios de proporção geometrica.*

Neste caso me parece que existe a questão do auctor, tratada genuinamente, como espero evidenciar, concluindo que não he mathematica a lingoagem respectiva do mesmo auctor; pois o increpado transtorno, ou defeito sem exemplo, provêm tão somente do modo especioso, ou privativo, como que o referido auctor encara ou discute a questão.

No segundo caso, ponderado e não concedido, isto he, se as oito significações discordassem, ou extravagueassem, conforme o benemerito auctor assegura, como se levaria a inconsequencia ao grande extremo de não designar ideas differentes por meio de signaes diversos, *maxime* quando estes signaes equivalem a expressões vulgares, a cujo respeito o mesmo auctor diz, que nenhuma existe da qual não se tenha dado, ou não se possa dar huma boa definição.

Seria por desgraça privilegio exclusivo dos mathematicos (contando mesmo neste numero assaz pequeno todos os mais distinctos) não poderem hombrear por este lado até com o vulgo?

Mas eu vou entrar no recinto da questão, precedendo apenas a ponderação de que o auctor presta sete *definições* á expressão $-$, e oito ao signal $+$, sendo talvez a razão desta differença a falta de completar o seu systema, apontando entre os n.os 12 e 13 que $- = - \times +$, assim como no 14 apontou que $- = - : +$.

Se o respeitavel auctor, conceituando-me tal qual mathematico, me perguntasse a significação das expressões $+$ e $-$, responderia « os mathematicos, na sua escritura-
» ção scientifica, em vez das palavras *mais*, *menos*, escre-
» vem $+$, $-$: por tanto, o que entenderieis vendo escri-
» tas aquellas palavras, devereis entender aonde estiverem
» escritos estes signaes. »

Eisaqui tudo, e eisaqui o que passo a demonstrar nos ca-

casos indicados pelo auctor, seguindo a ordem numerica prefixa.

O *vulgo* diz F. tem isto, mais isto, mais isto; o mathematico, designando cada isto diverso por huma letra differente, e a palavra *mais* pelo signal +, diria F. tem $a + b + c$: tal he a simplicidade do negocio controvertido!

Quem crerá que tem sido esta a origem de questões infinitas? Passemos a ver se estas sahem do assumpto, se de quem o discute.

Assim como as propriedades da circunferencia se dedusem da fundamental preferida para servir de base á definição daquella curva, assim tambem as accepções da palavra *mais*, ou do seu indicador + na mathematica, são dedusidas da primordial respectiva; sem que por isso devão ser chamadas significações diversas, e ainda menos diversas definições.

1.° Supponhamos que da expressão F. tem $a + b + c$ abstrahimos F tem $+ c$; que deveremos entender-se não que F., alem de outros haveres tem c, ou que c deve ser accrescentado a outro haver, seja enunciado anteriormente, seja posteriormente declarado; seguindo-se entendermos, que + junto a c mostra estar a quantidade c destinada para ser accrescentada a outra quantidade tal como por exemplo $a + b$?

Nestes termos a denominação *positivas* dada a taes quantidades, alem de ser convencional, quem não a vê fundada na voz latina *positus* derivada de *ponere*, que corresponde ao nosso *pôr*, o qual significa tambem *accrescentar*, como por exemplo quando se diz = pôr algum dinheiro da propria bolsa para completar o pagamento de algum objecto =?

Que discordancia pois se deve encontrar nesta denominação: ou que significação diversa da primeira?

2.° Semelhantemente na accepção *vulgar*, propria da palavra *menos*, esta voz he reportada a expressões dependendentes de outras, ou claras ou subentendidas: por exemplo, diz-se F tem menos tanto de altura, quando se quer asseverar, que a sua altura he inferior aquelle tanto, ou á que lhe tem sido attribuida, ou á considerada por quem está fallando, ou á que vai ser declarada, &c.: não acontecendo igual dependencia na proposição = tem pequena (ou tem grande) altura =.

Esta dependencia tacita ou expressa, passou sem paralogismo para o signal — indicador da voz *menos*; e por isso este signal anteposto a qualquer grandeza mathematica, denota que esta grandeza se refere a outra explicita, ou implicitamente; e se refere no sentido subtractivo, opposto ao das quantidades positivas: o que se exprime chamando *negativa* a primeira grandeza; sem que esta denominação deixe de concordar com a definição do signal —.

3.º Considerando agora a expressão $b - c$, convem ponderar que principiou a existir mediante a generalisação de outras taes como $5 - 3$, $8 - 7$, &c., no que ninguem jamais encontrará paralogismo: depois, applicada a casos particulares condusio a outras taes como $3 - 5$, $7 - 8$, &c. e foi obvio reflectir, que sendo b, c geraes indicadores de quaesquer grandezas cumpria ajuizar de $b - c$, quando $b > c$, quando $b = c$; e quando $b < c$.

Na primeira hypothese, nada se apresenta mais natural do que concluir $b - c$ igual á differença entre b e c; concluindo tambem, que esta differença deve existir no sentido positivo, e expressando tudo por meio da equação $a = b - c$, a qual designa que c deve ser diminuido de b.

Se alguns tem dito, que na mencionada hypothese $+ a$ significa a soma de huma grandeza positiva com outra menor negativa, nem serão os primeiros em adoptar especiosidades, nem a semelhante especiosidade compete a qualificação de significação, ou definição geralmente seguida: e isto apesar de se parecer com a expressão *vulgar* de quem tratando, por exemplo, de dar bens e dividas a hum inventario, dissesse ao escrivão delle *accrescentai* a divida c.

4.º

4.° O caso $b - a = b + (-a)$ igualmente especioso está comprehendido no anterior, pois indica soma da quantidade negativa $-a$ com a positiva $+b$; porêm considerando mathematicamente a intervenção dos parenthesis a especiosidade cresce, pois redusindo-se então o mesmo caso a $b + 1 \times - a$ fica sobremaneira transformado, e pertence ao artigo 12.° em que se vê na lingoagem do auctor $- = + \times -$, quando os mathematicos dizem apenas abbreviadamente, *mais multiplicado por menos dá menos*: expressão assaz diversa de *menos igual a mais multiplicado por menos.*

Em summa, seja qual for o artigo ou 3.°, ou 12.°, a que corresponda esta singular expressão $b - a = b + (-a)$, he superflua a sua consideração separada, e por tanto inadmissivel em discussão propria da mathesi.

5.° Affirma o benemerito auctor, que os mathematicos definem $+ = + \times +$, quando elles apenas asseverão, que *mais multiplicado por mais dá mais*, ou que $+ \times +$ dá $+$! Ora, huma vez que os mathematicos devem contemplar na representação geral das quantidades, não só as suas grandezas, mas tambem o sentido em que existem humas a respeito das outras, applicão esta contemplação á multiplicação das quantidades; e por tanto considerando o caso $+ \times +$ discorrem acertada, e coherentemente, dizendo: « a multiplicação ordinaria, da qual a algebrica nada mais » he do que huma indicação geral, constitue huma abbre- » viatura da soma; pois o seu resultado, chamado produ- » cto, deve equivaler ao da soma do multiplicando comsi- » go mesmo, repetido tantas vezes quantas são as unida- » des do multiplicador: mas em $+ \times +$ o multiplicando, » ou cada huma das parcellas, existe no sentido augmen- » tativo, e o signal do multiplicador mostra que devem » todas ser repetidas neste mesmo sentido; logo, visto » dever ser positiva a soma de parcellas positivas, ou po- » sitivo o todo composto de partes positivas, segue-se que » o producto de taes multiplicações deve ser additivo, e » conseguintemente o sentido da sua existencia deve ser in-

« indicado pelo signal + » o que exprimem concisamente pela maneira sobremencionada, pertendendo assim dizer, que nas multiplicações, quando ambos os factores existirem no sentido positivo, o producto deve tambem existir no sentido positivo.

6.° Tendo para multiplicar — por —, concluiria sem o menor paralogismo, que tambem deve ser + o signal do producto, servindo-me, ou de hum raciocinio semelhante ao que deixo expendido, ou daquelle que vou expender.

O signal — reporta sempre a quantidade respectiva a outra, indicando que desta deve ser aquella subtrahida; e somente por abstracção pode ser a primeira quantidade contemplada isoladamente: passemos pois a não abstrahir, e no resultado que obtivermos, em quanto ás quantidades abstrahidas, encontraremos o que sempre lhes corresponde. (*a*)

Refira-se pois no multiplicando o signal — á quantidade c, que deve ser tirada de outra maior b; e no multiplicador á quantidade n, que deve ser tirada de outra maior m: o que poderei verificar em todos os casos imaginaveis desta natureza, visto que b e m são supponiveis a meu arbitrio; e que por ventura o benemerito auctor do ensaio jamais encontrará neste raciocinio o menor paralogismo, ainda mesmo quando quisesse abusar extraordinariamente da sua finissima dialectica.

Mas desta sorte vêmo-nos redusidos a multiplicar $b - c$ por $m - n$, ou a somar m vezes a quantidade $b - c$ positiva, e da soma tirar n vezes a mesma quantidade.

Considerando tão somente a subtracção, por ser a parte da operação aonde entra $-n$, concluiremos, que a multiplicação de huma grandeza positiva $b - c$ por outra negativa $-n$ equivale á subtracção da primeira praticada tantas vezes quantas são as unidades da segunda; ou que $+ a \times - n = - an$, ou que $+ \times -$ dá $-$; mas nunca diremos $- = + \times -$, pois o signal $=$ não significa *dá* nem *produz*; e a proposição indicada pela expressão $- =$

+

$+ \times -$ differe essencialmente da que os mathematicos enunciáo como deixo repetido.

Voltando agora á subtracção de $b - c$ effeituada tantas vezes quantas unidades ha em $-n$, com a maior facilidade comprehenderemos, que poderá ser effeituada por dois modos: 1.° tirando c de b, multiplicando o resto por n, e subtrahindo o producto; 2.° tirando bn, e ajuntando ao resto a quantidade cn.

Com effeito suppondo correspondentes a b, c, n os numeros 5, 3, 7, redusir-se-hia o nosso caso a devermos tirar $(5-3)7$; o que realisariamos, ou tirando $2 \times 7 = 14$, ou tirando 5×7, e accrescentando ao resto 3×7, que se reduz a tirar 35 e augmentar ou restituir 21, ou a tirar $35 - 21 = 14$.

O primeiro modo he mais singelo mas singular; o segundo he mais composto, porêm geral, e unico praticavel com os caracteres algebricos, segundo aliás he proprio de soluções que devem comprehender todos os casos homogeneos: vemos pois que o producto de $b - c$ por $-n$, geralmente considerado, reduz-se a $-bn + cn$.

Abstrahindo a parte em que tão somente entrão c e n, e vendo ser $+cn$, com razão finalisaremos concluindo, que $-c$ multiplicado por $-n$ deve produsir $+cn$; e por tanto diremos sem paralogismo, que $- \times -$ dá $+$.

Aproveitando esta occasião notarei, que a demonstração anterior foi mais longa do que seria se a proposição estivesse no seu lugar; o que não realisei em consequencia de haver seguido a serie prefixada pelo benemerito auctor do Ensaio.

Este symptoma, por assim dizer, que podemos denominar *extensão excessiva* de demonstração, ja me tem servido para descobrir a falta da devida gradação, ou succesão, nos consecutivos theoremas expostos em diversas obras mathematicas: o que tambem pode ser indicado pelas demonstrações indirectas, ou *ex absurdo*, quasi sempre designadoras de que a proposição respectiva não faz systema

 com

com as outras, ou precede algumas que devião precedel-la.

7.° O expendido parece bastante para se concluir, que a proposição + : + dá + não he desenvolvimento de paralogismo, nem nova significação ou definição do signal +; mas sim precisa consequencia de exacto raciocinio fundado na genuina definição do mesmo signal, e na da operação da divisão.

Com tudo accrescentarei que, visto dever o producto do divisor pelo quociente equivaler ao dividendo, como demais a mais cumpre considerar nas quantidades o sentido em que existem, segue-se dever ser tal o signal do quociente, que da multiplicação do divisor pelo mesmo quociente resulte o dividendo, não só em quanto á sua grandeza, mas tambem no tocante ao signal.

Resulta pois deste rigoroso raciocinio que + : + deve dar +.

8.° Do mesmo raciocinio tambem resulta, que — : — deve dar +.

9.° Huma vez designadas as linhas geometricas por caracteres algebricos, se por hypothese considerarmos como positivas aquellas, que deverem augmentar outra prefixa, ou que deverem ser-lhe accrescentadas, somente sendo inconsequentes a respeito da mesma hypothese, e de tudo o que fica expendido, poderemos deixar de indicar como negativas todas aquellas linhas, que deverem encurtar a mesma linha prefixa, ou que deverem ser-lhe subtrahidas.

Generalisando esta consideração como he proprio da mathesi, diremos sem paralogismo, antes sim como consequencia precisa das noções anteriores, que no tocante ás linhas, e mais geralmente ainda em relação ás quantidades geometricas representadas por caracteres algebricos, se designarmos como positivas aquellas que seguirem huma direcção, ou tiverem huma situação prefixa, deveremos designar como negativas aquellas que seguirem direcção, ou tiverem situação relativamente opposta; e *vice-versa* (*b*).

Em

Em fim, julgando muito facil a applicação dos precedentes raciocinios aos casos dos numeros 10 a 14, que restaria considerar, parece-me completamente destruida a prova fundamental da asserção, que pertende collocar a nomenclatura da *mathese* muito abaixo das nomenclaturas de *todas* as outras sciencias, moraes e physicas: devo pois rematar aqui a presente memoria.

NOTAS.

(*a*) He claro que o estado abstracto sempre se deriva daquelle que existe, e pode ser chamado concreto: alem disto a ponderada abstracção nem altera as quantidades abstrahidas, nem o sentido relativo em que ellas existem, nem a operação tendente a nada mais do que mudar huma expressão dellas em outra equipolente: em fim, devendo o producto *ex. gr.* de r por t ser sempre o mesmo, quer consideremos r como parte do todo $f + r$, quer de $g + r$, &c.; e assim tambem t como parte do todo $x + t$, ou de $z + t$, &c.; he manifesto, que o dito producto, em qualquer das referidas hypotheses, deve ser havido como geral para todas as homogeneas, e não como privativo daquella que o produsio.

(*b*) Pertendendo-se maior explanação a este respeito, consulte-se a lição duodecima dos = Elementos de Geometria Philosophica do Senhor Stockler, Barão da Villa da Praia = lição que fiz imprimir, e distribuir, em Lisboa, no anno 1819.

NB. *Aproveito esta primeira occasião de publicar que, depois de impressa a minha memoria sobre o que Mr. Bory de S. Vincent escrevêra á cerca da minha patria, me certifiquei em que o additamento respectivo he obra do Ex.^mo Senhor* Thomaz Antonio de Villa-nova Portugal.